Painotetut epäyhtälöt
3. tehtävien ratkaisut (HM)

1. Todista, että ylöspäinekstrapolointilauseen (Theorem 2.2) todistusluonnoksessa määritelty painofunktio $W = (R'h)^{(p-r)/(p-1)}w$ kuuluu painoluokkaan A_r ja esitä arvio normille $[W]_{A_r}$.

Ratkaisu. Olkoon $s = (p-1)/(p-r) > 1$. Tällöin $s' = (p-1)/(r-1)$. Nyt käyttämällä Hölderiä näillä potensseilla saadaan

$$\begin{aligned}\langle W\rangle_Q = \langle (R'h)^{(p-r)/(p-1)}w\rangle_Q &= \langle (wR'h)^{(p-r)/(p-1)}w^{(r-1)/(p-1)}\rangle_Q \\ &\le \langle wR'h\rangle_Q^{(p-r)/(p-1)}\langle w\rangle_Q^{(r-1)/(p-1)}.\end{aligned}$$

Painoluokan A_1 määritelmän nojalla taas saadaan

$$\begin{aligned}\langle W^{-1/(r-1)}\rangle_Q^{r-1} &= \langle (R'h)^{-(p-r)/[(p-1)(r-1)]}w^{-1/(r-1)}\rangle_Q^{r-1} \\ &= \langle (wR'h)^{-(p-r)/[(p-1)(r-1)]}w^{-1/(p-1)}\rangle_Q^{r-1} \\ &\le [wR'h]_{A_1}^{(p-r)/(p-1)}\langle wR'h\rangle_Q^{-(p-r)/(p-1)}\langle w^{-1/(p-1)}\rangle_Q^{r-1}.\end{aligned}$$

Täten pätee

$$\begin{aligned}\langle W\rangle_Q\langle W^{-1/(r-1)}\rangle_Q^{r-1} &\le [wR'h]_{A_1}^{(p-r)/(p-1)}(\langle w\rangle_Q\langle w^{-1/(p-1)}\rangle_Q^{p-1})^{(r-1)/(p-1)} \\ &\le [wR'h]_{A_1}^{(p-r)/(p-1)}[w]_{A_p}^{(r-1)/(p-1)}.\end{aligned}$$

Edelleen on voimassa

$$\begin{aligned}[wR'h]_{A_1} &\le 2\|M\|_{L^{p'}(w^{-1/(p-1)})\to L^{p'}(w^{-1/(p-1)})} \\ &\le 8ep([w^{-1/(p-1)}]_{A_{p'}}[w^{-1/(p-1)\cdot(-1/(p'-1))}]_{A_\infty})^{1/p'} \\ &= 8ep([w]_{A_p}^{1/(p-1)}[w]_{A_\infty})^{(p-1)/p} = 8ep[w]_{A_p}^{1/p}[w]_{A_\infty}^{(p-1)/p}.\end{aligned}$$

Tästä saadaan lopulta, että

$$[W]_{A_r} \lesssim_{p,r} [w]_{A_p}^{(r-1)/(p-1)+(p-r)/[(p-1)p]}[w]_{A_\infty}^{(p-r)/p}.$$

2. Todista, että (reaaliarvoisen, mitallisen) funktion mediaani on olemassa, ja että sen kaikkien mediaanien joukko on suljettu väli (mahdollisesti pelkkä piste).

Ratkaisu. Tässä voidaan halutessa sallia arvot $-\infty$ ja ∞ nollamittaisessa joukossa. Olkoon Q sellainen mitallinen joukko, että $0 < |Q| < \infty$.

Asetetaan

$$\alpha = \inf\{\beta : |\{x \in Q : f(x) > \beta\}| \le |Q|/2\}.$$

Jos olisi $\alpha = \infty$, niin mitan konvergenssin nojalla

$$0 = |\{x \in Q : f(x) = \infty\}| \geq |Q|/2 > 0.$$

Täten $\alpha < \infty$. Jos olisi $\alpha = -\infty$, niin jälleen mitan konvergenssin nojalla

$$|Q| = |\{x \in Q : f(x) > -\infty\}| \leq |Q|/2.$$

Siis $\alpha \in \mathbb{R}$. Tässä voidaan lisäksi infimum korvata minimillä, sillä

$$|\{x \in Q : f(x) > \alpha\}| = \lim_{j\to\infty} |\{x \in Q : f(x) > \alpha + 1/j\}| \leq |Q|/2.$$

Näin ollen $|\{x \in Q : f(x) > \beta\}| \leq |Q|/2$, jos ja vain jos $\beta \geq \alpha$.

Edelleen pätee

$$\begin{aligned} |\{x \in Q : f(x) < \alpha\}| &= \lim_{j\to\infty} |\{x \in Q : f(x) \leq \alpha - 1/j\}| \\ &= \lim_{j\to\infty} (|Q| - |\{x \in Q : f(x) > \alpha - 1/j\}|) \leq |Q|/2, \end{aligned}$$

sillä $|\{x \in Q : f(x) > \alpha - 1/j\}| > |Q|/2$ kaikilla j. Olkoon sitten

$$\gamma = \sup\{\beta : |\{x \in Q : f(x) < \beta\}| \leq |Q|/2\}.$$

Nyt on jälleen selvää, että $\gamma < \infty$, ja että tämä on oikeastaan maksimi. Lisäksi yllä todistetusta seuraa, että $\gamma \geq \alpha$. On osoitettu, että funktion f kaikkien mediaanien $m_f(Q)$ joukko on täsmälleen $[\alpha, \gamma]$.

3. Totea, että jos $f \in \mathrm{BMO}$, niin kaikilla $\alpha > 0$ on olemassa sellainen $\lambda = \lambda(\alpha)$, että kaikilla Q
$$|Q \cap \{|f - c_Q| > \alpha\}| \leq \lambda |Q| \tag{0.1}$$
jollain luvulla c_Q. Lisäksi $\lambda(\alpha) \to 0$, kun $\alpha \to \infty$.

   Seuraavat asiat tulee todistaa Lernerin kaavan avulla:

   (i) Jos f on mitallinen funktio, ja on olemassa jokin $\alpha > 0$, jolle (0.1) pätee vakiolla $\lambda = 2^{-n-2}$, niin tällöin $f \in \mathrm{BMO}$ ja $\|f\|_{\mathrm{BMO}} \leq C\alpha$.

   (ii) Samoilla oletuksilla kuin kohdassa (i) pätee, että on olemassa sellainen $\epsilon > 0$, että $\exp(\epsilon|f|)$ on integroituva mielivaltaisella kuutiolla Q.

Ratkaisu. Aloitetaan alun helpolla havainnolla. Olkoon siis annettu BMO-funktio f ja $\alpha > 0$. Tällöin pätee

$$|Q \cap \{|f - \langle f\rangle_Q| > \alpha\}| \leq \frac{1}{\alpha}\int_Q |f - \langle f\rangle_Q| \leq \frac{2\|f\|_{\mathrm{BMO}}}{\alpha}|Q|.$$

Siirrytään sitten kohdan (i) todistukseen. Olkoon siis f mitallinen ja $\alpha > 0$ sellainen luku, että kaikilla kuutiolla Q pätee

$$|Q \cap \{|f - c_Q| > \alpha\}| \leq 2^{-n-2}|Q|$$

jollain vakiolla c_Q. Olkoon annettu mielivaltainen kuutio $Q_0 \subset \mathbb{R}^d$. Lernerin kaavan nojalla on olemassa sellaiset kuution Q_0 dyadiset osakuutiot Q_j^k, että

$$|f(x) - m_f(Q_0)| \leq 4M^{\#}_{1/4,Q_0} f(x) + 4\sum_k \sum_j \omega_{2^{-n-2}}(f, \widehat{Q}_j^k)\chi_{Q_j^k}(x)$$

(millä tahansa mediaanilla $m_f(Q_0)$) melkein kaikilla $x \in Q_0$. Palautetaan tässä vielä mieleen Lernerin kaavan yksityiskohtia. Ensinnäkin

$$\omega_\lambda(f; Q) = \inf_c ((f - c)\chi_Q)^*(\lambda|Q|)$$

ja

$$M^{\#}_{\lambda,Q} f(x) = \sup_{Q' \in \mathcal{D}(Q)} \chi_{Q'}(x)\omega_\lambda(f; Q').$$

Lisäksi $\{Q_j^k\}_j$ on erillinen kokoelma kaikilla k, joukot $\Omega_k = \bigcup_j Q_j^k$ toteuttavat $\Omega_{k+1} \subset \Omega_k$, ja $|Q_j^k \cap \Omega_{k+1}| \leq |Q_j^k|/2$.

Jos $\lambda \geq 2^{-n-2}$ ja $Q \subset \mathbb{R}^d$ on mielivaltainen kuutio, niin

$$\omega_\lambda(f; Q) \leq ((f - c_Q)\chi_Q)^*(\lambda|Q|) \leq \alpha,$$

sillä

$$((f - c_Q)\chi_Q)^*(\lambda|Q|) = \inf\{\beta > 0 : |Q \cap \{|f - c_Q| > \beta\}| \leq \lambda|Q|\},$$

ja

$$|Q \cap |f - c_Q| > \alpha\}| \leq 2^{-n-2}|Q| \leq \lambda|Q|.$$

Täten Lernerin kaavasta saadaan, että

$$|f - m_f(Q_0)|\chi_{Q_0} \leq 4\alpha\Big(\chi_{Q_0} + \sum_k \sum_j \chi_{Q_j^k}\Big).$$

Näin ollen pätee

$$\frac{1}{|Q_0|}\int_{Q_0} |f - m_f(Q_0)| \leq 4\alpha + \frac{4\alpha}{|Q_0|}\sum_k |\Omega_k| \leq 4\alpha + 4\alpha \sum_k 2^{-k+1} = 12\alpha.$$

On osoitettu, että f on BMO-funktio, ja $\|f\|_{\mathrm{BMO}} \leq 12\alpha$.

Osoitetaan vielä väite (ii). Pannaan ensin merkille, että

$$\int_{Q_0} \exp(\epsilon\,|f|) \leq \exp(\epsilon|m_f(Q_0)|)\Big(|Q_0| + \int_0^\infty e^t |Q_0 \cap \{|f - m_f(Q_0)| > t/\epsilon\}|\,dt\Big).$$

Yllä todistettiin, että kuutiossa Q_0 pätee Lernerin kaavan seurauksena estimaatti

$$|f(x) - m_f(Q_0)| \leq 4\alpha\Big(1 + \sum_k \sum_j \chi_{Q_j^k}(x)\Big).$$

Erityisesti joukossa $Q_0 \setminus \bigcup_j Q_j^k$ pätee, että

$$|f(x) - m_f(Q_0)| \leq 4\alpha k.$$

Olkoon $t > 4\alpha$. Valitaan sellainen $k = 1, 2, \ldots$, että $4\alpha k < t \leq 4\alpha(k+1)$. Tällöin pätee

$$Q_0 \cap \{|f - m_f(Q_0)| > t\} \subset Q_0 \cap \{|f - m_f(Q_0)| > 4\alpha k\} \subset \bigcup_j Q_j^k,$$

ja siis

$$|Q_0 \cap \{|f - m_f(Q_0)| > t\}| \leq |\Omega_k| \leq 2^{-k+1}|Q_0| \leq 2^{2-t/(4\alpha)}|Q_0| = 4e^{-\delta t}|Q_0|,$$

missä $\delta = \log 2/(4\alpha) > 0$. Valitaan sitten $\epsilon = \delta/2$. Tällöin kaikilla $t > 2\delta\alpha$ pätee

$$|Q_0 \cap \{|f - m_f(Q_0)| > t/\epsilon\}| \leq 4e^{-2t}|Q_0|,$$

ja väite seuraa.