Painotetut epäyhtälöt
2. tehtävien ratkaisut (HM)

1. Olkoon $p \in (1,\infty)$ kiinteä, ja oletetaan, että pätee arvio $\|M\|_{L^p(w)\to L^p(w)} \leq \phi([w]_{A_p})$ jollain kasvavalla funktiolla $\phi\colon [1,\infty) \to (0,\infty)$ ja kaikilla painoilla $w \in A_p$. Osoita, että tällöin välttämättä $\phi(t) \geq ct^{1/(p-1)}$.

Ratkaisu. Olkoon tässä M reaaliakselin $\mathbb{R}$ standardiin dyadiseen järjestelmään liittyvä maksimaalifunktio. Olkoot $f(x) = x^{s-1}\chi_{(0,1)}$ ja $w(x) = |x|^{(p-1)(1-s)}$, missä $s \in (0,1]$. Muistetaan, että $w \in A_p$, sillä $(p-1)(1-s) < p-1$. Lisäksi $f \in L^p(w)$, sillä $(s-1)p + (p-1)(1-s) = s-1 > -1$. Harjoitusten 1 nojalla vielä $[w]_{A_p} \sim_p 1/s^{p-1}$.

Todetaan seuraavaksi, että ainakin pätee helppo arvio $Mf \geq f/(2s)$. Jos $0 < x < 1$, niin on olemassa $j = 0,1,2,\ldots$ niin, että $2^{-j-1} \leq x < 2^{-j}$. Erityisesti $x \in [0, 2^{-j})$, ja siten pätee

$$Mf(x) \geq \frac{1}{2^{-j}} \int_0^{2^{-j}} x^{s-1}\,dx = \frac{1}{2^{-j}}\frac{1}{s}(2^{-j})^s \geq \frac{1}{2x}\frac{1}{s}x^s = \frac{1}{2s}x^{s-1} = f(x)/(2s).$$

Tästä saadaan, että

$$\|M\|_{L^p(w)\to L^p(w)} \geq \frac{\|Mf\|_{L^p(w)}}{\|f\|_{L^p(w)}} \geq \frac{1}{2s} \gtrsim_p [w]_{A_p}^{1/(p-1)}.$$

Väite koskien funktiota ϕ seuraa varioimalla parametria s.

2. Osoita, että dyadista logaritmista maksimaalifunktiota koskevasta tuloksesta

$$\|M_0\|_{L^1\to L^1} \leq N$$

seuraa logaritminen Hardyn epäyhtälö

$$\int_0^\infty \exp\Big(\frac{1}{x}\int_0^x \log|f(y)|\,dy\Big)\,dx \leq N\int_0^\infty |f(y)|\,dy,$$

ja todista, että vakio $N = e$ on tässä paras mahdollinen.

Ratkaisu. Olkoon annettu $A > 0$. Osoitamme, että

$$\int_0^A \exp\Big(\frac{1}{x}\int_0^x \log|f(y)|\,dy\Big)\,dx \leq N\int_0^A |f(y)|\,dy,$$

mistä väite tietysti seuraa. Voidaan olettaa, että $f \geq 0$. Approksimoimalla voidaan olettaa, että f on rajoitettu. Tämän jälkeen skaalamalla voidaan olettaa, että $0 \leq f \leq 1/2$. Sitten korvaamalla f funktiolla $f + c$ voidaan olettaa, että $0 < c \leq f \leq 1$.

Olkoon $\epsilon > 0$. On olemassa sellainen $\delta_0 > 0$, että jos $E \subset [0,A]$ ja $|E| < \delta_0$, niin $\int_E \log(1/f) < \epsilon^2$. Olkoon $\delta = A/m < \delta_0$ jollain $m \in \mathbb{N}$. Olkoon $\mathcal{D}_\delta = \{[0,k\delta) : k =$

$1, 2, \ldots, m\}$, ja olkoon M_0^δ tähän dyadiseen systeemiin liittyvä logaritminen maksimaalifunktio.

Olkoon $x \in [\epsilon, A)$ annettu. Valitaan sellainen $k = 1, 2, \ldots, m$, että $x \in [(k-1)\delta, k\delta)$. Tällöin pätee

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\int_0^x \log f &= \Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{k\delta}\Big)\int_0^x \log f + \frac{1}{k\delta}\int_x^{k\delta} \log(1/f) + \frac{1}{k\delta}\int_0^{k\delta} \log f \\ &\leq \frac{1}{\epsilon}\epsilon^2 + \frac{1}{k\delta}\int_0^{k\delta} \log(f\chi_{[0,A)}) = \epsilon + \frac{1}{k\delta}\int_0^{k\delta} \log(f\chi_{[0,A)}),\end{aligned}$$

ja siis

$$\exp\Big(\frac{1}{x}\int_0^x \log f\Big) \leq e^\epsilon M_0^\delta(f\chi_{[0,A)})(x).$$

Tästä seuraa, että

$$\int_0^A \exp\Big(\frac{1}{x}\int_0^x \log|f(y)|\,dy\Big)\,dx \leq \epsilon + e^\epsilon N\int_0^A f,$$

ja siten haluttu logaritminen Hardyn epäyhtälö on todistettu samalla vakiolla N.

Osoitetaan, että välttämättä $N \geq e$ (muista, että M_0:lle pätevässä epäyhtälössä, ja siis myös logaritmisessa Hardyn epäyhtälössä, voidaan ottaa $N = e$). Tätä varten määritellään jokaisella $\epsilon > 0$ funktio f_ϵ asettamalla

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } 0 < x < e, \\ x^{-1-\epsilon}, & \text{jos } x > e. \end{cases}$$

Olkoon lisäksi

$$g_\epsilon(x) = \exp\Big(\frac{1}{x}\int_0^x \log|f_\epsilon(y)|\,dy\Big).$$

Huomaa, että $g_\epsilon(x) = 1$, jos $0 < x < e$. Jos $x > e$, niin pätee

$$g_\epsilon(x) = \exp\Big(\frac{1}{x}(-1-\epsilon)[x\log(x/e) - e\log 1]\Big) = e^{1+\epsilon}x^{-1-\epsilon}.$$

Jos logaritminen Hardyn epäyhtälö pätee vakiolla N, niin tällöin on oltava

$$e + e^{1+\epsilon}\int_\epsilon^\infty x^{-1-\epsilon}\,dx \leq N(e + \int_e^\infty x^{-1-\epsilon}\,dx).$$

Pätee $\int_e^\infty x^{-1-\epsilon}\,dx = e^{-\epsilon}/\epsilon$, ja täten

$$N \geq e\frac{1+\epsilon}{\epsilon e + e^{-\epsilon}} \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} e.$$

3. Tarkastele Buckleyn lauseen todistuksessa esiintynyttä välivaihetta

$$\|\chi_R M(\chi_R\sigma)\|_{L^p(w)}^p \leq 2^{p+1}[w]_{A_p}[\sigma]_{A_\infty}\|\chi_R M_0(\chi_R\sigma)\|_{L^1},$$

joka todistettiin pääkutioiden avulla. Muunnetaan pääkuutioiden määritelmä muotoon $\langle\sigma\rangle_Q > a\langle\sigma\rangle_S$, missä $a > 1$. Tutki minkä vakion saat edellisen arvion 2^{p+1} tilalle, ja optimoi tämä a:n suhteen.

Ratkaisu. Seurataan luentomonistetta merkintöineen. Ensimmäinen ero on, että nyt $|E(S)| \geq (1-1/a)|S|$ so. $|S| \leq (1-1/a)^{-1}|E(S)|$. Lisäksi pätee $\chi_{E(S)}M(\chi_R\sigma) \leq a\langle\sigma\rangle_S$. Nämä ovat ainoat pääkuutioihin liittyvät estimaatit, joita todistuksessa käytetään. Seuraamalla sitten todistusta, mutta käyttämällä oleellisissa kohdissa edellä mainittuja estimaatteja, saadaan

$$\|\chi_R M(\chi_R\sigma)\|_{L^p(w)}^p \leq a^p(1-1/a)^{-1}[w]_{A_p}[\sigma]_{A_\infty}\|\chi_R M_0(\chi_R\sigma)\|_{L^1}.$$

On siis minimoitava funktiota $f(a) := a^p(1-1/a)^{-1}$, $a > 1$. Lasku osoittaa, että

$$f'(a) = \frac{a^p}{(a-1)^2}[(a-1)p-1].$$

Tällä on nollakohta $a_0 = 1 + 1/p > 1$, ja derivaatan merkeistä nähdään, että tämä on minimi. Nyt pätee

$$f(a_0) = \left(1+\frac{1}{p}\right)^p(1+p).$$