Painotetut epäyhtälöt
1. tehtävien ratkaisut (HM)

1. Olkoon $1 < p < q < \infty$. Osoita, että $[w]_{A_1} \geq [w]_{A_p} \geq [w]_{A_q} \geq 1$. Osoita myös, että jos $\sigma := w^{-1/(p-1)}$, niin
$$[w]_{A_p} \leq [w]_{A_\infty}[\sigma]_{A_\infty}^{p-1}.$$

Ratkaisu. Kaikilla kuutioilla $Q \subset \mathbb{R}^n$ pätee

$$\begin{aligned}1 = \langle 1\rangle_Q^q = \langle w^{1/q}w^{-1/q}\rangle_Q^q &\leq \Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\Big)\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-q'/q}\Big)^{q/q'} \\ &= \Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\Big)\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-1/(q-1)}\Big)^{q-1},\end{aligned}$$

ja siten erityisesti $[w]_{A_q} \geq 1$.

Väite $[w]_{A_q} \leq [w]_{A_p}$ seuraa huomaamalla, että sillä $q' - 1 < p' - 1$, niin pätee

$$\begin{aligned}\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-1/(q-1)}\Big)^{q-1} &= \langle (w^{-1})^{q'-1}\rangle_Q^{1/(q'-1)} \\ &\leq \langle (w^{-1})^{p'-1}\rangle_Q^{1/(p'-1)} = \Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-1/(p-1)}\Big)^{p-1}.\end{aligned}$$

Lisäksi on voimassa

$$\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\Big)\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-1/(p-1)}\Big)^{p-1} \leq [w]_{A_1}\operatorname*{ess\,inf}_Q w \cdot (\operatorname*{ess\,inf}_Q w)^{-1} = [w]_{A_1},$$

ja siis $[w]_{A_p} \leq [w]_{A_1}$.

Epäyhtälö $[w]_{A_p} \leq [w]_{A_\infty}[\sigma]_{A_\infty}^{p-1}$ seuraa välittömästi määritelmistä ja identiteetistä

$$\Big(\exp\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q \log\sigma^{-1}\Big)\Big)^{p-1} = \Big(\exp\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q \log w^{-1}\Big)\Big)^{-1}.$$

2. Tarkastellaan yksiulotteista avaruutta $\mathbb{R}$ ja potenssipainoja $w_\alpha(x) = |x|^\alpha$. Kun $p \in [1,\infty)$ on annettu, tutki millä α:n arvoilla pätee $w_\alpha \in A_p$ ja arvioi $[w_\alpha]_{A_p}$:n suuruutta. Riippuuko tulos siitä, tarkastellaanko A_p:tä kaikkien välien vai ainoastaan dyadisten välien suhteen?

Ratkaisu. Tarkastellaan aluksi tapausta $p \in (1,\infty)$. Funktioiden $x \mapsto |x|^\alpha$ ja $x \mapsto |x|^{-\alpha/(p-1)}$ tulee olla lokaalisti integroituvia. Tästä saadaan välttämätön rajoitus $-1 < \alpha < p-1$. Osoitamme, että tämä jo takaa $w_\alpha \in A_p$.

Annettu mielivaltainen väli $I = I_{x_0,r} = (x_0 - r, x_0 + r)$. Oletetaan ensin, että $|x_0| \geq 2r$. Nyt pätee

$$\frac{1}{2r}\int_{x_0-r}^{x_0+r} |x|^\beta\,dx \leq \begin{cases} (|x_0|+r)^\beta, & \text{jos } \beta \geq 0, \\ (|x_0|-r)^\beta, & \text{jos } \beta < 0. \end{cases}$$

Koska $|x_0| + r \leq 2|x_0|$ ja $|x_0| - r \geq |x_0|/2$, niin

$$\frac{1}{2r}\int_{x_0-r}^{x_0+r} |x|^\beta\,dx \leq 2^{|\beta|}|x_0|^\beta.$$

Tästä päätellään, että

$$\begin{aligned}\Big(\frac{1}{2r}\int_{x_0-r}^{x_0+r} |x|^\alpha\,dx\Big)\Big(\frac{1}{2r}\int_{x_0-r}^{x_0+r} |x|^{-\alpha/(p-1)}\,dx\Big)^{p-1} &\leq 2^{|\alpha|}|x_0|^\alpha(2^{|\alpha|/(p-1)}|x_0|^{-\alpha/(p-1)})^{p-1} \\ &= 4^{|\alpha|} \leq 4^{\max(1,p-1)} \lesssim_p 1.\end{aligned}$$

Oletetaan sitten, että $|x_0| < 2r$. Tällöin $(x_0 - r, x_0 + r) \subset (-3r, 3r)$. Jos $\beta > -1$, niin

$$\frac{1}{2r}\int_{x_0-r}^{x_0+r} |x|^\beta\,dx \leq \frac{1}{r}\int_0^{3r} x^\beta\,dx = \frac{3^{\beta+1}}{\beta+1}r^\beta.$$

Täten pätee

$$\Big(\frac{1}{2r}\int_{x_0-r}^{x_0+r} |x|^\alpha\,dx\Big)\Big(\frac{1}{2r}\int_{x_0-r}^{x_0+r} |x|^{-\alpha/(p-1)}\,dx\Big)^{p-1} \lesssim_p \frac{1}{1+\alpha}\frac{1}{p-1-\alpha}.$$

On osoitettu, että $w_\alpha \in A_p$, jos ja vain jos $\alpha \in (-1, p-1)$, ja pätee

$$[w_\alpha]_{A_p} \lesssim_p \frac{1}{1+\alpha}\frac{1}{p-1-\alpha}.$$

Käsitellään sitten tapaus $p = 1$. Lokaali integroituvuus funktiolle $x \mapsto |x|^\alpha$ vaatii $\alpha > -1$. Toisaalta funktion $x \mapsto |x|^{-\alpha}$ tulee olla rajoitettu lähellä origoa, ja siten on välttämättä oltava $\alpha \leq 0$. Yllä olevien laskujen välittömät muunnokset osoittavat sitten, että $w_\alpha \in A_1$, jos ja vain jos $-1 < \alpha \leq 0$, ja pätee

$$[w_\alpha]_{A_1} \lesssim_p \frac{1}{1+\alpha}.$$

On selvää, että vastaukset ovat samat myös dyadisessa tapauksessa, sillä tässä triviaalisti välttämättömät ehdot olivat myös riittäviä.

3. Olkoon $E \subset \mathbb{R}$ mitallinen joukko, ja olkoot sekä E että sen komplementti einollamittaisia. (a) Osoita, että kun I käy läpi kaikki $\mathbb{R}$:n välit, niin suhde $|E \cap I|/|I|$ käy läpi kaikki luvut $\alpha \in (0, 1)$, mutta ei välttämättä (sopivalla E) arvoa 0 tai 1. (b) Osoita, että joukko E voidaan valita siten, että kun I käy läpi kaikki $\mathbb{R}$:n dyadiset välit, niin suhde $|E \cap I|/|I|$ käy läpi täsmälleen luvut 0, 1/2 ja 1.

Ratkaisu. (a): Merkitään $I_{x_0,r} = (x_0 - r, x_0 + r)$. Olkoon $\epsilon > 0$. Oletuksista ja Lebesguen differentioituvuuslauseesta seuraa, että on olemassa pisteet $x \in E$ ja $y \in E^c$ ja luku $\delta > 0$ niin, että $|E \cap I_{x,\delta}|/|I_{x,\delta}| \geq 1 - \epsilon$ ja $|E \cap I_{y,\delta}|/|I_{y,\delta}| \leq \epsilon$. Olkoon $f(t) = |E \cap (I_{x,\delta} + t)|/2\delta$. Tällöin f on jatkuva, $f(0) \geq 1 - \epsilon$ ja $f(y - x) \leq \epsilon$. Täten f saa ainakin kaikki arvot välillä $[\epsilon, 1 - \epsilon]$. Koska $\epsilon > 0$ oli mielivaltainen, saa suhde $|E \cap I|/|I|$ ainakin kaikki arvot välillä $(0, 1)$.

Konstruoidaan sitten joukko E niin, että $0 < |E \cap I| < |I|$ kaikilla väleillä I. Riittää työskennellä välillä $[0, 1]$. Huomaa, että riittää todistaa, että on olemassa sellainen funktio $f\colon [0, 1] \to \{0, 1\}$, että $f \not\equiv 0$ ja $f \not\equiv 1$ kaikilla väleillä $I \subset [0, 1]$ (kaikki asiat m.k. mielessä tietysti). Tällöin voidaan nimittäin asettaa $E = \{x \in [0, 1] : f(x) = 0\}$.

Tälläisen funktion olemassaolo seuraa ainakin Bairen lauseesta. Avaruutena X toimii kaikki funktiot $f\colon [0, 1] \to \{0, 1\}$ varustettuna L^1-metriikalla $d(f, h) = \int_0^1 |f - h|$. Tämä on täydellinen metrinen avaruus – siis toista kategoriaa. Olkoon $A = A_{p,q} = \{f \in X : f \equiv 0 \text{ välillä } [p, q]\} \cup \{f \in X : f \equiv 1 \text{ välillä } [p, q]\}$, $p, q \in \mathbb{Q}$, $p < q$. Riittää osoittaa, että tälläinen joukko A on ei-missään tiheä (tällöin numeroituva yhdiste yli $p, q \in \mathbb{Q}$, $p < q$, on ensimmäistä kategoriaa, ja siis avaruuden X aito osajoukko).

Tulee siis osoittaa, että A^c on tiheä (sillä $A = \overline{A}$). Olkoot tätä varten $f \in X$ ja $\epsilon < q - p$. Asetetaan

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in (p, p + \epsilon/3), \\ 0, & \text{jos } x \in (p + \epsilon/3, p + 2\epsilon/3) \\ f(x), & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Nyt pätee $h \in A^c$ ja $d(f, h) \leq 2\epsilon/3 < \epsilon$, ja siis A^c on tiheä.

(b): Voidaan ottaa

$$E = \cdots \cup [-5, -4] \cup [-3, -2] \cup [-1, 0] \cup [0, 1] \cup [2, 3] \cup [4, 5] \cup \cdots .$$

4. Olkoon $E \subset \mathbb{R}$ kuten edellisessä tehtävässä, $t \in (0, 1)$, ja $w_t = t\chi_E + \chi_{\mathbb{R} \setminus E}$. Laske $[w_t]_{A_1}$, $[w_t]_{A_2}$ ja $[w_t]_{A_\infty}$ sekä (a) kaikkia välejä vastaaville A_p-karaktereille ja yleiselle joukolle E että (b) dyadisia välejä vastaaville A_p-karaktereille ja edellisen tehtävän (b)-kohdan joukolle E.

Ratkaisu. (a): Jos $I \subset \mathbb{R}$ on väli, niin tällöin

$$\frac{1}{|I|} \int_I w_t = 1 + (t - 1) \frac{|E \cap I|}{|I|}.$$

Lisäksi $\|w_t^{-1}\|_{L^\infty(I)} = t^{-1}$, jos $I \cap E \neq \emptyset$, ja $\|w_t^{-1}\|_{L^\infty(I)} = 1$, jos $I \cap E = \emptyset$. Täten pätee

$$[w_t]_{A_1} = \sup_I \Big(\frac{1}{|I|} \int_I w_t \Big) \|w_t^{-1}\|_{L^\infty(I)} = 1 \cdot t^{-1} = t^{-1},$$

sillä kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa väli $I \subset \mathbb{R}$ niin, että $0 < |I \cap E| < \epsilon |I|$, ja lisäksi $t - 1 < 0$ ja $t^{-1} > 1$.

Pätee

$$
\begin{aligned}
[w_t]_{A_2} &= \sup_I \Big(\frac{1}{|I|}\int_I w_t\Big)\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w_t^{-1}\Big) \\
&= \sup_I \Big(1+(t-1)\frac{|E\cap I|}{|I|}\Big)\Big(1+(t^{-1}-1)\frac{|E\cap I|}{|I|}\Big) \\
&= \Big(1+(t-1)\frac{1}{2}\Big)\Big(1+(t^{-1}-1)\frac{1}{2}\Big) = \frac{(1+t)^2}{4t}.
\end{aligned}
$$

Lasketaan vielä $[w_t]_{A_\infty}$. Pannaan tätä varten merkille, että

$$
\begin{aligned}
[w_t]_{A_\infty} &= \sup_I \Big(\frac{1}{|I|}\int_I w_t\Big)\exp\Big(\frac{1}{|I|}\int_I \log w_t^{-1}\Big) \\
&= \sup_I \Big(1+(t-1)\frac{|E\cap I|}{|I|}\Big)t^{-\frac{|E\cap I|}{|I|}}.
\end{aligned}
$$

Funktion $g(s) := (1+(t-1)s)t^{-s}$ derivaatan nollakohta on

$$
s_0 := \frac{t-1-\log t}{(t-1)\log t} \in (1/2, 1).
$$

Nyt pätee $g(0) = 1 = g(1)$ ja

$$
g(s_0) = \frac{(t-1)t^{1/(t-1)}}{e\log t} \in (1,\infty).
$$

Täten pätee

$$
[w_t]_{A_\infty} = \frac{(t-1)t^{1/(t-1)}}{e\log t}.
$$

(b): Edelleen pätee $[w_t]_{A_1} = t^{-1}$ ja $[w_t]_{A_2} = \frac{(1+t)^2}{4t}$ (vastaavat supremumit saavutetaan arvoilla 0 ja 1/2). Nyt pätee $[w_t]_{A_\infty} = (1+t)/(2\sqrt{t}) > 1$ (saavutetaan arvolla 1/2 – huomaa yllä $1/2 < s_0 < 1$).

5. Osoita, että $\|Mf\|_{L^{p,\infty}(\omega)} \le [w]_{A_p}^{1/p}\|f\|_{L^p(w)}$.

Ratkaisu. Aloitetaan todistamalla, että $w(Q)|\langle f\rangle_Q|^p \le [w]_{A^p}\int_Q |f|^p w$ kaikilla kuutioilla $Q \subset \mathbb{R}^n$:

$$
\begin{aligned}
|\langle f\rangle_Q|^p = |\langle f w^{1/p}w^{-1/p}\rangle_Q|^p &\le \langle |f|^p w\rangle_Q \langle w^{-1/(p-1)}\rangle_Q^{p-1} \\
&\le \langle |f|^p w\rangle_Q [w]_{A_p}(w(Q)/|Q|)^{-1} = w(Q)^{-1}\cdot [w]_{A_p}\int_Q |f|^p w.
\end{aligned}
$$

Olkoon $\lambda > 0$, ja olkoot $Q_1, Q_2, \ldots$ maksimaaliset dyadiset kuutiot Q, joille pätee $|\langle f\rangle_Q| > \lambda$. Tähän liittyen tarvitsee tietysti jonkun (standardin) perustelun näiden olemassaololle. Voidaan toimia esimerkiksi seuraavalla tavalla. Yllä olevan nojalla $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, ja yleisyyden kärsimättä sitten $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ – muuten korvaa tulevassa päättelyssä f funktiolla $f\chi_{[-k,k]^n}$ (vakiot eivät riipu k:sta). Nyt $|\langle f\rangle_Q| \le |Q|^{-1}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \to 0$, kun $|Q| \to \infty$, ja halutut maksimaaliset kuutiot ovat siis taatusti olemassa.

Käyttäen sitten alun havaintoa saadaan, että

$$\begin{aligned}w(\{Mf > \lambda\}) = \sum_j w(Q_j) &= \sum_j w(Q_j)|\langle f\rangle_{Q_j}|^p|\langle f\rangle_{Q_j}|^{-p} \\ &\leq \lambda^{-p}[w]_{A_p}\sum_j \int_{Q_j} |f|^p w \leq \lambda^{-p}[w]_{A_p}\|f\|^p_{L^p(w)}.\end{aligned}$$

Täten on voimassa

$$\|Mf\|_{L^{p,\infty}(\omega)} = \sup_{\lambda>0} \lambda w(\{Mf > \lambda\})^{1/p} \leq [w]^{1/p}_{A_p}\|f\|_{L^p(w)},$$

ja väite on todistettu.