

Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Harjoituskokoelma 3, kevät 2011

Palautus Eemeli Blåstenille ti 12.4. klo 16.00 mennessä

1. Ratkaise ongelma

$$u_{tt} - 4u_{xx} = e^{2x} + \cos t, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = (1 + x^2)^{-1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Määritä alkuarvo-ongelman

$$u_{ttx} - u_{xxx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

$$u_x(x, 0) = 0, \quad u_{xt}(x, 0) = \cos x, \quad x \in \mathbb{R},$$

yleinen ratkaisu.

3. Ratkaise ns. *Darboux:n ongelma*

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad t > \max\{-x, x\}, t > 0,$$

$$u(x, t) = \phi_{\pm}(t), \quad x = \pm t, t \geq 0,$$

missä funktiot ϕ_+ ja $\phi_- \in C^2([0, \infty))$ toteuttavat yhteensopivuusehdon $\phi_+(0) = \phi_-(0) = 0$. Mitä osaat sanoa ongelman yksikäsitteisestä ratkeavuudesta?

4. Ratkaise reuna-alkuarvo-ongelma

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \infty, t > 0,$$

$$u(0, t) = t(1 + t)^{-1}, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad x \geq 0.$$

Mitä huomaat raja-arvosta

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(cx, x)?$$

5. Määritä vakiokertoimisen Schrödinger-yhtälön

$$u_t = ik u_{xx}$$

muotoa

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

olevat ratkaisut; tässä $k > 0$ on vakio.

6. Olkoon Ω rajoitettu C^2 -tasoaalue, ja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ Helmholtz-yhtälön

$$\Delta u(x) - k^2 u(x) = 0, \quad x \in \Omega,$$

ratkaisu, jolle $u|_{\partial\Omega} = 0$. Oletetaan, että $\operatorname{Re} k^2 > 0$. Osoita, että $u = 0$.

Vihje: Käytä Greenin kaavoja!

7. Oletaan, että tason avoimessa osajoukossa $\Delta u(x) + x \cdot \nabla u(x) = 0$, missä $x = (x_1, x_2)$. Osoita, ettei u :lla voi olla aitoja lokaaleja maksimeja.

8. Olkoon $B = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| > 1\}$. Oletetaan että $u \in C^2(B) \cap C(\overline{B})$, u harmoninen B :ssä ja että

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \max_{|x|=r} u(x) = 0.$$

Osoita, että

$$\max_{\overline{B}} u = \max_{|x|=1} u.$$

9. Olkoon Ω tasoaalue, ja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ yhtälön

$$\Delta u(x) + a(x) \cdot \nabla u(x) + c(x)u(x) = 0, \quad x \in \Omega,$$

ratkaisu. Oletetaan, että kaikilla x pätee $c(x) < 0$. Osoita, että jos $u|_{\partial\Omega} = 0$, niin $u = 0$ koko alueessa Ω .

10. Olkoon $H = \{(x_1, x_2); x_2 > 0\}$ avoin ylempi puolitaso. Oletetaan, että $u \in C^2(H) \cap C(\overline{H})$ on H :ssa harmoninen ja rajoitettu. Osoita, että

$$\sup_H u = \sup_{\partial H} u.$$

Onko väite totta, jos emme oletta että u on rajoitettu? **Vihje:** Tutki aluksi harmonista funktiota

$$u(x_1, x_2) - \varepsilon \ln \sqrt{x_1^2 + (x_2 + 1)^2},$$

sopivassa rajoitetussa alueessa.