Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Harjoituskokoelma 2, kevät 2011

Palautus Eemeli Blåstenille ti 15.3 klo 12.00 mennessä

1. Ratkaise Cauchy–ongelma

$$u_t + cu_x + u^2 = 0, \quad u(x,0) = x,$$

missä c on positiivinen vakio.

2. Ratkaise Cauchy–ongelma

$$xuu_x + yuu_y = 0, \quad u(x, x^2) = x^3, \quad x > 0,$$

ja hahmottele karakteristikat. Mitä osaat sanoa tämän perusteella ratkaisusta?

3. Etsi ainakin viisi (5) eri ratkaisua ongelmalle

$$u_x + u_y = 1, \quad u(x,x) = x.$$

Vihje: Määrää ensin yhtälön $u_x + u_y = 1$ karakteristiset käyrät. Mitä huomaat alkuarvo käyrästä?

4. Määrää yhtälön

$$u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} = 0$$

yleinen ratkaisu. **Vihje:** Tee sopiva lineaarinen muttujanvaihto, ja ratkaise näin saatu yksinkertaisempi yhtälö.

5. Määrää yhtälön

$$u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} = xy^2$$

yleinen ratkaisu.

6. Määrää edellisen tehtävän se ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot

$$u(x,0) = \sin x, \quad u_y(x,0) = \cos(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

7. Tarkastellaan Cauchy–ongelmaa

$$u_{tt} - 4u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = (1 - x^2)\chi_{[-1,1]}(x), \quad u_t(x,0) = 4\chi_{[1,2]}(x),$$

missä $\chi_{[a,b]}$ on välin $[a,b]$ karakteristinen funktio. Määrää ongelman heikko ratkaisu, ja laske raja–arvo $\lim_{t\to\infty} u(5,t)$.

8. Määrää kaikki ne pisteet, missä edellisen tehtävän ratkaisu u ei ole klassinen ratkaisu. Onko ratkaisulla epäjatkuvuuskohtia? Jos on, niin määrää nekin.

9. Olkoon u Cauchy–ongelman

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

ratkaisu. Osoita, että jos f ja g ovat parittomia funktioita, niin myös u on pariton funktio muutujan x suhteen.

10. Tarkastellaan seuraavaa *reuna–alkuarvo–ongelmaa* aaltoyhtälölle:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0,$$

$$u(0,t) = t^2, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad x \geq 0.$$

Huomaa, että nyt etsimme ratkaisua vain kun $x \geq 0$, ja oletamme ajasta riippuvan *reunaehdon* reunapisteessä $x = 0$. Oletetaan, että alkuehdot $f \in C^2([0,\infty))$ ja $g \in C^2([0,\infty))$ toteuttavat *yhteensopivuusehdot*

$$f(0) = f'(0) = g(0) = 0.$$

Konstruoi ratkaisu tälle ongelmalle. **Vihje**: Jatka f ja g parittomiksi funktioiksi koko reaaliakselille, ja ratkaise Cauchy–ongelma näillä alkuarvoilla käyttäen D'Alembertin kaavaa. Osoita edellistä tehtävää käytääen, että tämän ratkaisun rajoittuma joukkoon $x \geq 0$, $t > 0$ on haettu ratkaisu.