

Logiikka I
Harjoitus 6

1. Olkoon $M = \{1, 2, 3, 4\}$ ja $E^M = \{(1, 2), (2, 1), (2, 4), (4, 2), (2, 3), (3, 2)\}$. Mitkä seuraavista tulkintajonoista toteuttavat kaavan $E(x, y) \rightarrow \neg E(x, z)$ mallissa (M, E^M) ?
 - (a) $s_0(x) = 4, s_0(y) = 2$ ja $s_0(z) = 1$
 - (b) $s_1(x) = 4, s_1(y) = 2$ ja $s_1(z) = 3$
 - (c) $s_2(x) = 4, s_2(y) = 1$ ja $s_2(z) = 3$.

2. Oletetaan, että jokainen tulkintajono $s : \{x\} \rightarrow M$ toteuttaa mallissa $M = (M, H^M, B^M)$ kaavan $H(x) \vee \neg B(x)$. Näytä, että jokainen tulkintajono $s : \{x\} \rightarrow M$ toteuttaa mallissa M myös kaavan $B(x) \rightarrow H(x)$.

3. Oletetaan, että jokainen tulkintajono $s : \{x, y\} \rightarrow M$ toteuttaa mallissa $M = (M, R^M)$ kaavan $R(x, y) \rightarrow \neg R(y, x)$. Näytä, että jokainen tulkintajono $s : \{x, y\} \rightarrow M$ toteuttaa mallissa M myös kaavan $\neg R(x, x)$.

4. Kokeessa opiskelijat A ja B formalisoivat väitteen on olemassa mies, jolla on pitkät hiukset seuraavasti (merkitään M =mies ja P =omaa pitkät hiukset):
A: $\exists x(M(x) \wedge P(x))$
B: $\exists x(M(x) \rightarrow P(x))$.
Tarkastele näiden lauseiden totuutta strukturissa $S = (\{a, b, c\}, M^S, P^S)$ missä $M^S = \{c\}$ ja $P^S = \{b\}$. Kumpi formalisointi oli oikein?

5. Olkoon $M = (\mathbb{N}, P^M)$, missä $P^M = \emptyset$. Näytä, että $M \models \forall x(P(x) \rightarrow \neg x = x)$.

6. Olkoon $R^M \subseteq M^2, M \neq \emptyset$. Näytä, että R^M on symmetrinen jos ja vain jos $(M, R^M) \models \forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$.