

Logiikka I
Harjoitus 4

Tehtävissä 3-5 saa käyttää eheyslauseetta mutta ei täydellisyyslauseetta.

1. Esitä seuraava väitteen $A \vee (A \rightarrow B)$ todistus luonnollisena päättelyinä eli formaalisti.

Tehdään vastaoletus, että väite ei päde. Nyt jos A pätee niin myös $A \vee (A \rightarrow B)$ pätee mikä on ristiriidassa vastaoletuksen kanssa, joten A ei päde. Tällöin $A \rightarrow B$ pätee, joten myös $A \vee (A \rightarrow B)$ pätee mikä on edelleen ristiriidassa vastaoletuksen kanssa. Siis vastaoletus on väärä ja väite on totta.

2. Esitä seuraava luonnollinen päättely sanallisesti edellisen tehtävän tapaan.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[A \wedge \neg B]^2}{A} \wedge E \quad \frac{[A \wedge \neg B]^2}{\neg B} \wedge E \\
 \frac{[A \rightarrow B]^1 \quad A}{B} \rightarrow E \quad \frac{[A \wedge \neg B]^2}{\neg B} \wedge E \\
 \frac{B \quad \neg B}{B \wedge \neg B} \wedge I \\
 \frac{B \wedge \neg B}{\neg(A \rightarrow B)} \neg I,1 \\
 \frac{\neg(A \rightarrow B)}{(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)} \rightarrow I,2
 \end{array}$$

3. Voidaanko luonnollisella päättelyllä päätellä lause $((p_0 \wedge p_1) \rightarrow \neg p_0) \rightarrow (\neg p_0 \vee p_1)$?

4. Voidaanko luonnollisella päättelyllä päätellä lause $(p_0 \vee p_1) \rightarrow p_2$ lauseesta $(p_0 \rightarrow p_2) \wedge (p_1 \rightarrow p_2)$?

5. Voidaanko luonnollisella päättelyllä päätellä lause $(\neg p_0 \rightarrow p_2) \wedge (\neg p_1 \rightarrow p_2)$ lauseesta $\neg(p_0 \vee p_1) \rightarrow p_2$?

6. Anna semanttinen todistus lauseelle $(A \rightarrow (B \vee C)) \rightarrow (\neg B \rightarrow (A \rightarrow C))$.