Logiikan paja, kevät 2011
Tehtäviä viikolle IX

Piirrä kuva (käytä mielikuvitustasi) joukosta, jonka määrittelee kaava

1. $P_0(x) \vee P_1(x)$
2. $P_0(x) \vee \neg P_1(x)$
3. $P_0(x) \rightarrow P_1(x)$
4. $(P_0(x) \vee P_1(x)) \rightarrow P_2$

Piirrä kuva kaksipaikkaisesta relaatiosta, jonka määrittelee kaava

5. $x > 1 \vee y < 0$,
6. $x < 1 \wedge y < 0$,
7. $x = 1 \rightarrow y < 0$, struktuuriin $(\mathbb{R}, <, 0, 1)$.

8. Olkoon $M = (M, <)$ struktuuri, jonka universumi on $\{0, 1, 2\}$ ja missä $<$ on joukon M luonnollinen järjestys. Näytä, että kaikilla $a \in M$, joukko $\{a\}$ on määriteltävä M:ssä. Tehtävässä riittää antaa määrittelevä kaava.
9. Perustele suoraan Tarskin totuusmääritelmästä lähtien edellisen tehtävän vastauksesi tapauksessa $a = 0$.
10. Olkoon M struktuuri, jonka universumin kaikki yhden alkion osajoukot ovat määriteltäviä. Näytä, että M:n universumin kaikki äärelliset osajoukot ovat määriteltäviä.
11. Olkoon $M = (M, <)$ struktuuri, jonka universumi on $\{0, \ldots, 2010\}$ ja missä $<$ on M:n universumin luonnollinen järjestys.
    Näytä, että relaatio $R = \{(x, y) \in M \times M | x < 2010, y = x + 1\}$ on määriteltävä.

12. (3 pistettä). Selitä omin sanoin koska termin voi sijoittaa muuttujaan, eli koska termi t on vapaa muuttujalle x.

Onko y vapaa muuttujalle x seuraavissa kaavoissa?

13. $\exists y \forall x (R(x,z) \to R(x,y))$
14. $\exists y (\forall x R(x,z) \to R(x,y))$
15. $\exists y \forall x R(x,z) \to R(x,y)$
16. $\exists y \forall x R(x,z) \to \exists y R(x,y)$

17. Olkoon $A = \exists y \neg (P(x) \leftrightarrow P(y))$ ja B kaava, joka saadaan A:sta korvaamalla x muuttujalla y. Onko B lauseen $\forall x A$ looginen seuraus?