Logiikan paja, kevät 2011
Tehtäviä viikolle VII

Olkoon $M = \{a, b, c, d\}$ ja $R^M = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, d), (d, a), (d, d)\}$. Toteuttaako tulintajono s_i kaavan $R(x, y) \to \neg R(x, z)$ mallissa (M, R^M)? Perustele.

1. $s_0(x) = a, s_0(y) = b, s_0(z) = c$
2. $s_1(x) = a, s_1(y) = d, s_1(z) = c$
3. $s_2(x) = a, s_2(y) = d, s_2(z) = a$
4. $s_3(x) = d, s_3(y) = d, s_3(z) = d$
5. $s_4(x) = b, s_4(y) = b, s_4(z) = c$
6. $s_5(x) = b, s_5(y) = a, s_5(z) = c$
7. $s_6(x) = c, s_6(y) = d, s_6(z) = c$
8. $s_7(x) = c, s_7(y) = d, s_7(z) = b$
9. $s_8(x) = a, s_8(y) = b, s_8(z) = b$
10. $s_9(x) = b, s_9(y) = d, s_9(z) = c$
11. $s_{10}(x) = c, s_{10}(y) = a, s_{10}(z) = b$
12. Päteekö, että $M \models_{s_0} \exists x(R(x, y) \to \neg R(x, z))$?
13. Päteekö, että $M \models_{s_0} \exists y(R(x, y) \to \neg R(x, z))$?
14. Päteekö, että $M \models_{s_0} \exists z(R(x, y) \to \neg R(x, z))$?
15. Päteekö, että $M \models_{s_0} \exists y \exists x(R(x, y) \to \neg R(x, z))$?
16. Päteekö, että $M \models_{s_0} \exists z \exists x(R(x, y) \to \neg R(x, z))$?
17. Päteekö, että $M \models_{s_0} \exists z \exists y \exists x(R(x, y) \to \neg R(x, z))$?
18. Päteekö, että $M \models_{s_0} \neg \forall x(R(x, y) \to \neg R(x, z))$?

19. Kokeessa opiskelijat A ja B formalisoivat väitteen on olemassa mies, jolla on pitkät hiukset seuraavasti (merkitään M =mies ja P =omaa pitkät hiukset):
A: $\exists x(M(x) \wedge P(x))$ B: $\exists x(M(x) \to P(x))$. Tarkastele näiden lauseiden totuutta struktuurissa $S = (\{a, b, c\}, M^S, P^S)$ missä $M^S = \{c\}$ ja $P^S = \{b\}$. Kumpi formalisointi oli oikein?

20. Olkoon $M = (\mathbb{N}, P^M)$, missä $P^M = \emptyset$. Näytä, että $M \models \forall x(P(x) \to \neg x = x)$.

21. Olkoon $R^M \subset M^2, M \neq \emptyset$. Näytä, että R^M on symmetrinen jos ja vain jos
$$(M, R^M) \models \forall x \forall y(R(x, y) \to R(y, x)).$$

22. Näytä, että $\forall x(A \to \exists x A)$ on validi.

23. Näytä, että $\forall x A \to \forall x B$ on lauseen $\forall x(A \to B)$ looginen seuraus.

24. Näytä, että $\exists x P_0(x) \to \exists x P_1(x)$ ei ole lauseen $\exists x(P_0(x) \to P_1(x))$ looginen seuraus.

25. Näytä, että $\exists x \neg A \to (B \to \neg \forall x A)$ on validi.

26. Näytä, että kaavat $\exists x \neg(A \wedge B)$ ja $\neg \forall x A \vee \neg \forall x B$ ovat loogisesti ekvivalentteja.