

**Logiikan paja, kevät 2011**  
**Tehtävät viikolle 6**

1. Olkoon  $M = \{1, 2, 3, 4\}$  ja  $E^M = \{(1, 2), (2, 1), (2, 4), (4, 2), (2, 3), (3, 2)\}$ . Mitkä seuraavista tulkintajonoista toteuttavat kaavan  $E(x, y) \rightarrow \neg E(x, z)$  mallissa  $(M, E^M)$ ?

- $s_0(x) = 4, s_0(y) = 2$  ja  $s_0(z) = 1$
- $s_1(x) = 4, s_0(y) = 2$  ja  $s_0(z) = 3$
- $s_2(x) = 4, s_0(y) = 1$  ja  $s_0(z) = 3$ .

2. Oletetaan, että jokainen tulkintajono  $s : \{x\} \rightarrow M$  toteuttaa mallissa  $M = (M, H^M, B^M)$  kaavan  $H(x) \vee \neg B(x)$ . Näytä, että jokainen tulkintajono  $s : \{x\} \rightarrow M$  toteuttaa mallissa  $M$  myös kaavan  $B(x) \rightarrow H(x)$ .
3. Oletetaan, että jokainen tulkintajono  $s : \{x, y\} \rightarrow M$  toteuttaa mallissa  $M = (M, R^M)$  kaavan  $R(x, y) \rightarrow \neg R(y, x)$ . Näytä, että jokainen tulkintajono  $s : \{x, y\} \rightarrow M$  toteuttaa mallissa  $M$  myös kaavan  $\neg R(x, x)$ .
4. Onko propositiolause  $\neg(((p_0 \rightarrow p_1) \vee p_2) \wedge p_0)$  tautologia vai ei? Anna tarkka perustelu!
5. Onko propositiolause  $\neg(((p_0 \rightarrow p_1) \vee p_0) \rightarrow p_0)$  tautologia vai ei? Anna tarkka perustelu!
6. Anna luonnollinen päättely propositiolauseelle

$$((p_0 \vee \neg p_2) \vee (\neg p_3 \vee p_1)).$$

7. Anna luonnollinen päättely propositiolauseelle

$$(p_0 \rightarrow p_1) \rightarrow ((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (p_0 \rightarrow p_2)).$$

8. Osoita, että  $\{\wedge, \vee\}$  ei ole täydellinen konnektiivijoukko.
9. Anna luonnollinen päättely lauseelle  $\neg\neg B \rightarrow \neg\neg A$  lauseesta  $\neg A \rightarrow \neg B$ .
10. Onko propositiolause  $((p_0 \vee p_1) \vee p_0) \rightarrow p_0$  tautologia, kontingentti vai ristiriita? Anna tarkka perustelu!

11. Anna semanttinen todistus (eli todistus semanttisen puun avulla) propositiolauseelle

$$(p_0 \rightarrow p_1) \rightarrow ((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (p_0 \rightarrow p_2)).$$

12. Esitä seuraava propositiolauseen kanssa loogisesti ekvivalentti propositiolause, jossa esiintyy ainoastaan konnektiiveja  $\wedge$  ja  $\vee$ . Perustele esim. totuustaululla.

$$(p_0 \vee p_1) \rightarrow (p_1 \wedge p_0)$$