Logiikan paja, kevät 2011
Tehtäviä viikolle II

Kuvitellaan tilanne missä olemme osoittamassa jotakin väitettä (esimerkiksi tehtävän 8 väitettä) mielivaltaiselle propositiolauseelle A. Olemme osoittaneet että väite pätee jos

a) $A = p_i$

b) $A = (B \vee C)$, missä väite pätee lauseille B ja C.

c) $A = (B \wedge C)$, missä väite pätee lauseille B ja C.

d) $A = (B \rightarrow C)$, missä väite pätee lauseille B ja C.

e) $A = (B \leftrightarrow C)$, missä väite pätee lauseille B ja C.

1. Miksi väite pätee tällöin lauseelle p_0?
2. Miksi väite pätee tällöin lauseelle $p_{213804623846510394857}$?
3. Miksi väite pätee tällöin lauseelle $(p_0 \vee p_2)$?
4. Miksi väite pätee tällöin lauseelle $(p_0 \rightarrow p_2)$?
5. Miksi väite pätee tällöin lauseelle $((p_0 \vee p_2) \wedge (p_0 \rightarrow p_2))$?
6. Miksi väite pätee tällöin lauseelle $((p_{12} \leftrightarrow (p_3 \vee p_4)) \wedge p_3)$?
7. Miksi väite ei välttämättä päde lauseelle $(\neg p_3 \wedge p_1)$?

8. Osoita että kaikkilla propositiolauseilla on yhtä monta vasenta ja oikeaa sulkua.

Kirjoita seuraavat lauseet propositiolauseina. Osoita mitkä ovat pääkonnektiivit ja mitkä välittömät alikaavat.

9. Jos ikkuna on auki, niin huoneessa on kylmä vaikka lämmitin on päällä.
10. Ellei mekanismi ole rikki, valon palaessa ovi on kiinni.

11. Kirjoita seuraava lause propositiolauseena. Onko väite totta (juuri nyt Kumpulassa)?
    - Jos on pilvetöntä ja päivä, niin aurinko paistaa, paitsi jos on meneillään auringonpimennys.

Mitkä seuraavista merkkijonoista ovat propositiolauseita? Yritä perustella vastauksesi.

12. (p_0)
13. $(p_0 \vee (\neg p_0 \to (p_1 \wedge p_2)))$
14. $((p_0 \to p_1))$
15. $(p_0 \to (p_1 \wedge p_2) \to p_3)$

16. Millä totuusjakaumilla lause $(p_1 \to (\neg p_0 \to (\neg p_1 \wedge p_2)))$ on totta?

Saavatko seuraavat lauseet saman totuusarvon kaikilla totuusjakaumilla?

17. $(p_0 \leftrightarrow (p_1 \leftrightarrow p_2)))$ ja $((p_0 \leftrightarrow p_1) \leftrightarrow p_2)$
18. $(p_0 \to (p_1 \to p_2))$ ja $((p_0 \to p_1) \to p_2)$

19. Osoita, että $(A \wedge (B \wedge C))$ ja $((A \wedge B) \wedge C)$ ovat loogisesti ekvivalentit.
20. Osoita, että $(A \vee (B \vee C))$ ja $((A \vee B) \vee C)$ ovat loogisesti ekvivalentit.
21. Osoita, että $(A \wedge (B \vee C))$ ja $((A \wedge B) \vee C)$ ovat loogisesti ekvivalentit.
22. Osoita, että $(A \vee (B \wedge C))$ ja $((A \vee B) \wedge C)$ ovat loogisesti ekvivalentit.

Nyt voit jättä pois sulut peräkkäisten konnektiivien $\wedge$ ja $\vee$ kohdalla, sekä lauseiden uloimmat sulut, silloin kuin se **ei vaikuta lauseen yksiselitteisyyteen**.

Jos lisäämme propositiologiikan konnektiiveihen Shefferin viivan (katso moniste). Millä totuusjakaumilla seuraavat propositiolauseet ovat totta?

23. $p_0|p_1$

24. $(p_0|p_1)|(p_0|p_0)$

25. $(((((((p_0|p_0)|p_0)|p_0)|p_0)|p_0)|p_0)|p_0)|p_0$

Ovatko seuraavat lauseet disjunktiivisessa normaalimuodossa?

26. $p_{23542524562465}$

27. $p_1 \vee p_0$

28. $p_1 \wedge p_0$

29. $(p_0 \wedge p_1) \vee (p_0 \wedge p_4)$

30. $(p_0 \vee p_1) \wedge (p_0 \vee p_4)$

31. $(\neg p_0 \wedge p_1) \vee (p_0 \wedge p_4)$

32. $(\neg p_0 \vee p_1) \wedge (p_0 \vee p_4)$

Anna seuraaville lauseille ekvivalentti lause disjunktiivisessa normaalimuodossa

33. $p_0 \to p_1$

34. $p_0 \wedge (\neg p_1 \leftrightarrow p_2)$

35. $p_{24356} \wedge (\neg p_{756} \to p_0)$

Anna propositiolause joka määrittelee totuusfunktion

36. $f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x = 0 \text{ tai } y = 1 \\ 1, & \text{muuten.} \end{cases}$

37. $g(x,y,z) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x > z \\ 1, & \text{muuten.} \end{cases}$

38. $h(x,y,z) = 0.$

39. Osoita, että $\{\vee\}$ ei ole universaali konnektiivijoukko.