Logiikan paja, kevät 2011
Ratkaisuehdotuksia viikolle IV

1. Päättele luonnollisella päättelyllä $A \vee B$ lauseesta $A \vee (B \vee A)$.
   Vastaus: 1) `http://wiki.helsinki.fi/download/attachments/58367694/harj3.pdf`

2. Päättele luonnollisella päättelyllä $A \to C$ lauseesta $A \to (B \vee C)$ ja $\neg B$.
   Vastaus: 2) `http://wiki.helsinki.fi/download/attachments/58367694/harj3.pdf`

3. Päättele luonnollisella päättelyllä $B \to (A \to C)$ lauseesta $A \to (B \to C)$.
   Vastaus: 3)a. `http://wiki.helsinki.fi/download/attachments/58367694/harj3.pdf`

4. Päättele luonnollisella päättelyllä $A \to (B \vee C)$ lauseesta $(A \to B) \vee (A \to C)$.
   Vastaus: 3)b. `http://wiki.helsinki.fi/download/attachments/58367694/harj3.pdf`

5. Päättele luonnollisella päättelyllä lause A lauseesta $\neg((A \to C) \vee (B \to C))$.
   Vihje: Väliaikaisella oletuksella $\neg A$ päättele ensin $A \to C$. Tämä johtaa ristiriitaan alkuperäisen oletuksen kanssa.
   Vastaus: 5) `http://wiki.helsinki.fi/download/attachments/58367694/harj3.pdf`

6. Osoita, ettei ole olemassa luonnollista päättelyä lauseelle p_0 lauseesta $\neg p_0 \to p_1$.
   Vastaus: Kun $v(p_0) = 0$ ja $v(p_1) = 1$, niin $v(\neg p_0 \to p_1) = 1$ ja $v(p_0) = 0$. Eheyslauseen perusteella päättelyä ei ole olemassa.

7. Osoita, ettei ole olemassa luonnollista päättelyä lauseelle p_1 lauseesta $\neg p_0 \to p_1$.
   Vastaus: Kun $v(p_0) = 1$ ja $v(p_1) = 0$, niin $v(\neg p_0 \to p_1) = 1$ ja $v(p_1) = 0$. Eheyslauseen perusteella päättelyä ei ole olemassa.

8. Kerro mitä tarkoittaa semanttisen todistuksen antaminen kaavalle
   $(A \wedge C) \to (A \wedge (B \vee C))$?
   Vastaus: 4) (Huom. & $= \wedge$). `http://www.math.helsinki.fi/logic/opetus/log1/malliratkaisut4.pdf`

9. Anna semantiinen todistus kaavalle $(A \wedge C) \rightarrow (A \wedge (B \vee C))$.
   Vastaus: 4) (Huom. & = $\wedge$). `http://www.math.helsinki.fi/logic/opetus/log1/malliratkaisut4.pdf`

10. Kerro mitä tarkoittaa semanttisen todistuksen antaminen kaavalle $(\neg\neg B \vee \neg A) \rightarrow (\neg A \vee B)$?
    Vastaus: 5) (Huom. & = $\wedge$). `http://www.math.helsinki.fi/logic/opetus/log1/malliratkaisut4.pdf`

11. Anna semantiinen todistus kaavalle $(\neg\neg B \vee \neg A) \rightarrow (\neg A \vee B)$.
    Vastaus: 5) (Huom. & = $\wedge$). `http://www.math.helsinki.fi/logic/opetus/log1/malliratkaisut4.pdf`

12. Kerro mitä tarkoittaa semanttisen todistuksen antaminen kaavalle $((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \rightarrow (A \vee (B \wedge C))$?
    Vastaus: 6) (Huom. & = $\wedge$). `http://www.math.helsinki.fi/logic/opetus/log1/malliratkaisut4.pdf`

13. Anna semantiinen todistus kaavalle $((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \rightarrow (A \vee (B \wedge C))$.
    Vastaus: 6) (Huom. & = $\wedge$). `http://www.math.helsinki.fi/logic/opetus/log1/malliratkaisut4.pdf`

Kotitehtävä (3 p): Selitä omin sanoin kalvon `http://www.math.helsinki.fi/logic/opetus/log1/10_Logic_Propositional_Logic_soundness_text.pdf` sivu 22.
Vastaus: Olemme todistamassa propositiologiikan eheyslausetta. Eheyslauseen mukaan jos on olemassa päättely lauseelle B lauseesta A, niin silloin jos $v(A) = 1$ niin $v(B) = 1$. Todistus etenee niin, että käymme läpi kaikki mahdolliset tavat tehdä päättely (induktio päättelyiden suhteen). Kalvojen sivulla 22 olemme kohdassa jossa käymme läpi vaihoehtoa että päättelyssä käytetään disjunktion eliminointisääntöä.

Oletamme siis, että on olemassa päättely lauseelle C lauseesta $A \vee B$. Lisäksi oletamme että päättely lauseelle C lauseesta A ja päättely lauseelle C lauseesta B ovat eheät eli, että jos $v(A) = 1$ niin $v(C) = 1$ ja jos $v(B) = 1$ niin $v(C) = 1$.

Nyt jos $v(A \vee B) = 1$ niin disjunktion totuusmääritelmään mukaan $v(A) = 1$ tai $v(B) = 1$. Riippumatta siitä kumpi tapaus on voimassa niin $v(C) = 1$, joten päättely on disjunktioneliminointisäännön osalta eheä.