Ratkaisuehdotuksia
Logiikan paja 2011
Tehtävät 7. 1-18

Olkoon $M = \{a, b, c, d\}$ ja $R^M = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, d), (d, a), (d, d)\}$.

1. Huomataan, että $(a, c) \notin R^M$, eli $(s_0(x), s_0(z)) \notin R^M$, eli $M \not\models_{s_0} R(x, z)$, eli $M \models_{s_0} \neg R(x, z)$, eli $M \models_{s_0} R(x, y) \to \neg R(x, z)$.

2. Huomataan, että $(a, c) \notin R^M$, eli $(s_1(x), s_1(z)) \notin R^M$, eli $M \not\models_{s_1} R(x, z)$, eli $M \models_{s_1} \neg R(x, z)$, eli $M \models_{s_1} R(x, y) \to \neg R(x, z)$.

3. Huomataan, että $(a, d) \notin R^M$, eli $(s_2(x), s_2(z)) \notin R^M$, eli $M \not\models_{s_2} R(x, z)$, eli $M \models_{s_2} \neg R(x, z)$, eli $M \models_{s_2} R(x, y) \to \neg R(x, z)$.

4. Huomataan, että $(d, d) \in R^M$, eli $(s_3(x), s_3(y)) \in R^M$ ja $(s_3(x), s_3(z)) \in R^M$, eli $M \models_{s_3} R(x, y)$ ja $M \models_{s_3} R(x, z)$, eli $M \models_{s_3} R(x, y)$ ja $M \not\models_{s_3} \neg R(x, z)$, eli $M \not\models_{s_3} R(x, y) \to \neg R(x, z)$.

5. Huomataan, että $(b, b) \notin R^M$, eli $(s_4(x), s_4(y)) \notin R^M$, eli $M \not\models_{s_4} R(x, y)$, eli $M \models_{s_4} R(x, y) \to \neg R(x, z)$.

6. Huomataan, että $(b, a) \notin R^M$, eli $(s_5(x), s_5(y)) \notin R^M$, eli $M \not\models_{s_5} R(x, y)$, eli $M \models_{s_5} R(x, y) \to \neg R(x, z)$.

7. Huomataan, että $(c, c) \notin R^M$, eli $(s_6(x), s_6(z)) \notin R^M$, eli $M \not\models_{s_6} R(x, z)$, eli $M \models_{s_6} \neg R(x, z)$, eli $M \models_{s_6} R(x, y) \to \neg R(x, z)$.

8. Huomataan, että $(c, b) \notin R^M$, eli $(s_7(x), s_7(z)) \notin R^M$, eli $M \not\models_{s_7} R(x, z)$, eli $M \models_{s_7} \neg R(x, z)$, eli $M \models_{s_2} R(x, y) \to \neg R(x, z)$.

9. Huomataan, että $(a, b) \in R^M$, eli $(s_8(x), s_8(y)) \in R^M$ ja $(s_8(x), s_8(z)) \in R^M$, eli $M \models_{s_8} R(x, y)$ ja $M \models_{s_8} R(x, z)$, eli $M \models_{s_8} R(x, y)$ ja $M \not\models_{s_8} \neg R(x, z)$, eli $M \not\models_{s_8} R(x, y) \to \neg R(x, z)$.

10. Huomataan, että $(b, d) \notin R^M$, eli $(s_9(x), s_9(y)) \notin R^M$, eli $M \not\models_{s_9} R(x, y)$, eli $M \models_{s_9} R(x, y) \to \neg R(x, z)$.

11. Huomataan, että $(c, a) \notin R^M$, eli $(s_{10}(x), s_{10}(y)) \notin R^M$, eli $M \not\models_{s_{10}} R(x, y)$, eli $M \models_{s_{10}} R(x, y) \to \neg R(x, z)$

12. Tarskin totuusmääritelmän mukaan

$$M \models_{s_0} \exists x(R(x,y) \rightarrow \neg R(x,z))$$

joss, on olemassa $\alpha \in M$ siten, että

$$M \models_{s_0(\alpha/x)} R(x,y) \rightarrow \neg R(x,z)$$

joss, on olemassa $\alpha \in M$ siten, että

$$M \not\models_{s_0(\alpha/x)} R(x,y) \text{ tai } M \models_{s_0(\alpha/x)} \neg R(x,z)$$

joss, on olemassa $\alpha \in M$ siten, että

$$M \not\models_{s_0(\alpha/x)} R(x,y) \text{ tai } M \not\models_{s_0(\alpha/x)} R(x,z)$$

joss, on olemassa $\alpha \in M$ siten, että

$$(s_0(\alpha/x)(x), s_0(\alpha/x)(y)) \notin R^M \text{ tai } (s_0(\alpha/x)(x), s_0(\alpha/x)(z)) \notin R^M$$

joss, on olemassa $\alpha \in M$ siten, että

$$(\alpha, b) \notin R^M \text{ tai } (\alpha, c) \notin R^M.$$

Jos $\alpha = b$, niin $(\alpha, b) \notin R^M$. Joten $M \models_{s_0} \exists x(R(x,y) \rightarrow \neg R(x,z))$.

13. Tarskin totuusmääritelmän mukaan

$$M \models_{s_0} \exists y(R(x,y) \rightarrow \neg R(x,z))$$

joss, on olemassa $\alpha \in M$ siten, että

$$M \models_{s_0(\alpha/y)} R(x,y) \rightarrow \neg R(x,z)$$

joss, on olemassa $\alpha \in M$ siten, että

$$M \not\models_{s_0(\alpha/y)} R(x,y) \text{ tai } M \models_{s_0(\alpha/y)} \neg R(x,z)$$

joss, on olemassa $\alpha \in M$ siten, että

$$M \not\models_{s_0(\alpha/y)} R(x,y) \text{ tai } M \not\models_{s_0(\alpha/y)} R(x,z)$$

joss, on olemassa $\alpha \in M$ siten, että

$$(s_0(\alpha/y)(x), s_0(\alpha/y)(y)) \notin R^M \text{ tai } (s_0(\alpha/y)(x), s_0(\alpha/y)(z)) \notin R^M$$

joss, on olemassa $\alpha \in M$ siten, että

$$(a, \alpha) \notin R^M \text{ tai } (a, c) \notin R^M.$$

Koska $(a, c) \notin R^M$, niin $M \models_{s_0} \exists y(R(x, y) \to \neg R(x, z))$.

14. Tarskin totuusmääritelmän mukaan

$$M \models_{s_0} \exists z(R(x, y) \to \neg R(x, z))$$

joss, on olemassa $\alpha \in M$ siten, että

$$M \models_{s_0(\alpha/z)} R(x, y) \to \neg R(x, z)$$

joss, on olemassa $\alpha \in M$ siten, että

$$M \not\models_{s_0(\alpha/z)} R(x, y) \text{ tai } M \models_{s_0(\alpha/z)} \neg R(x, z)$$

joss, on olemassa $\alpha \in M$ siten, että

$$M \not\models_{s_0(\alpha/z)} R(x, y) \text{ tai } M \not\models_{s_0(\alpha/z)} R(x, z)$$

joss, on olemassa $\alpha \in M$ siten, että

$$(s_0(\alpha/z)(x), s_0(\alpha/z)(y)) \notin R^M \text{ tai } (s_0(\alpha/z)(x), s_0(\alpha/z)(z)) \notin R^M$$

joss, on olemassa $\alpha \in M$ siten, että

$$(a, b) \notin R^M \text{ tai } (a, \alpha) \notin R^M.$$

Jos $\alpha = a$, niin $(\alpha, a) \notin R^M$. Joten $M \models_{s_0} \exists z(R(x, y) \to \neg R(x, z))$.

15. Tarskin totuusmääritelmän mukaan

$M \models_{s_0} \exists y \exists x(R(x, y) \to \neg R(x, z))$

joss, on olemassa $\alpha \in M$ siten, että

$M \models_{s_0(\beta/y)} \exists x R(x,y) \to \neg R(x,z)$

joss, on olemassa $\alpha \in M$ ja $\beta \in M$ siten, että

$M \models_{s_0(\beta/y)(\alpha/x)} R(x,y) \to \neg R(x,z)$

joss, on olemassa $\alpha \in M$ ja $\beta \in M$ siten, että

$M \not\models_{s_0(\beta/y)(\alpha/x)} R(x,y)$ tai $M \models_{s_0(\beta/y)(\alpha/x)} \neg R(x,z)$

joss, on olemassa $\alpha \in M$ ja $\beta \in M$ siten, että

$M \not\models_{s_0(\beta/y)(\alpha/x)} R(x,y)$ tai $M \not\models_{s_0(\beta/y)(\alpha/x)} R(x,z)$

joss, on olemassa $\alpha \in M$ ja $\beta \in M$ siten, että

$$(s_0(\beta/y)(\alpha/x)(x), s_0(\beta/y)(\alpha/x)(y)) \notin R^M \text{ tai } (s_0(\beta/y)(\alpha/x)(x), s_0(\beta/y)(\alpha/x)(z)) \notin R^M$$

joss, on olemassa $\beta \in M$ ja $\alpha \in M$ siten, että

$$(\alpha, \beta) \notin R^M \text{ tai } (\alpha, c) \notin R^M.$$

Jos $\alpha = a$, niin $(\alpha, c) \notin R^M$. Joten $M \models_{s_0} \exists y \exists x(R(x,y) \to \neg R(x,z))$.

16. Tarskin totuusmääritelmän mukaan

$M \models_{s_0} \exists z \exists x(R(x,y) \to \neg R(x,z))$

joss, on olemassa $\alpha \in M$ siten, että

$M \models_{s_0(\alpha/z)} \exists x R(x,y) \to \neg R(x,z)$

joss, on olemassa $\alpha \in M$ ja $\beta \in M$ siten, että

$M \models_{s_0(\alpha/z)(\beta/x)} R(x,y) \to \neg R(x,z)$

joss, on olemassa $\alpha \in M$ ja $\beta \in M$ siten, että

$M \not\models_{s_0(\alpha/z)(\beta/x)} R(x,y)$ tai $M \models_{s_0(\alpha/z)(\beta/x)} \neg R(x,z)$

joss, on olemassa $\alpha \in M$ ja $\beta \in M$ siten, että

$M \not\models_{s_0(\alpha/z)(\beta/x)} R(x,y)$ tai $M \not\models_{s_0(\alpha/z)(\beta/x)} R(x,z)$

joss, on olemassa $\alpha \in M$ ja $\beta \in M$ siten, että

$$(s_0(\alpha/z)(\beta/x)(x), s_0(\alpha/z)(\beta/x)(y)) \notin R^M \text{ tai } (s_0(\alpha/z)(\beta/x)(x), s_0(\alpha/z)(\beta/x)(z)) \notin R^M$$

joss, on olemassa $\alpha \in M$ ja $\beta \in M$ siten, että

$(\beta, b) \notin R^M$ tai $(\beta, \alpha) \notin R^M$.

Jos $\beta = b$, niin $(\beta, b) \notin R^M$. Joten $M \models_{s_0} \exists z \exists x (R(x,y) \rightarrow \neg R(x,z))$.

17. Tarskin totuusmääritelmän mukaan

$$M \models_{s_0} \exists z \exists y \exists x (R(x,y) \rightarrow \neg R(x,z))$$

joss, on olemassa $\alpha \in M$ siten, että

$$M \models_{s_0(\alpha/z)} \exists y \exists x R(x,y) \rightarrow \neg R(x,z)$$

joss, on olemassa $\alpha \in M$ ja $\beta \in M$ siten, että

$$M \models_{s_0(\alpha/z)(\beta/y)} \exists x R(x,y) \rightarrow \neg R(x,z)$$

joss, on olemassa $\alpha \in M$, $\beta \in M$ ja $\chi \in M$ siten, että

$$M \models_{s_0(\alpha/z)(\beta/y)(\chi/x)} R(x,y) \rightarrow \neg R(x,z)$$

joss, on olemassa $\alpha \in M$, $\beta \in M$ ja $\chi \in M$ siten, että

$$M \not\models_{s_0(\alpha/z)(\beta/y)(\chi/x)} R(x,y) \text{ tai } M \models_{s_0(\alpha/z)(\beta/y)(\chi/x)} \neg R(x,z)$$

joss, on olemassa $\alpha \in M$, $\beta \in M$ ja $\chi \in M$ siten, että

$$M \not\models_{s_0(\alpha/z)(\beta/y)(\chi/x)} R(x,y) \text{ tai } M \not\models_{s_0(\alpha/z)(\beta/y)(\chi/x))} R(x,z)$$

joss, on olemassa $\alpha \in M$, $\beta \in M$ ja $\chi \in M$ siten, että

$$(s_0(\alpha/z)(\beta/y)(\chi/x)(x), s_0(\alpha/z)(\beta/y)(\chi/x)(y)) \notin R^M$$
$$\text{tai } (s_0(\alpha/z)(\beta/y)(\chi/x)(x), s_0(\alpha/z)(\beta/y)(\chi/x)(z)) \notin R^M$$

joss, on olemassa $\alpha \in M$, $\beta \in M$ ja $\chi \in M$ siten, että

$$(\chi, \beta) \notin R^M \text{ tai } (\chi, \alpha) \notin R^M.$$

Jos $\chi = \beta = b$, niin $(\chi, \beta) \notin R^M$. Joten $M \models_{s_0} \exists z \exists y \exists x (R(x,y) \to \neg R(x,z))$.

18. Tarskin totuusmääritelmän mukaan

$$M \models_{s_0} \neg \forall x (R(x,y) \to \neg R(x,z))$$

joss

$$M \not\models_{s_0} \forall x (R(x,y) \to \neg R(x,z))$$

joss, on olemassa $\alpha \in M$ siten, että

$$M \not\models_{s_0(\alpha/x)} R(x,y) \to \neg R(x,z)$$

joss, on olemassa $\alpha \in M$ siten, että

$$M \models_{s_0(\alpha/x)} R(x,y) \text{ ja } M \not\models_{s_0(\alpha/x)} \neg R(x,z)$$

joss, on olemassa $\alpha \in M$ siten, että

$$M \models_{s_0(\alpha/x)} R(x,y) \text{ ja } M \models_{s_0(\alpha/x)} R(x,z)$$

joss, on olemassa $\alpha \in M$ siten, että

$$(s_0(\alpha/x)(x), s_0(\alpha/x)(y)) \in R^M \text{ ja } (s_0(\alpha/x)(x), s_0(\alpha/x)(z)) \in R^M$$

joss, on olemassa $\alpha \in M$ siten, että

$$(\alpha, b) \in R^M \text{ ja } (\alpha, c) \in R^M.$$

Jos $\alpha = a$, niin $(\alpha, c) \notin R^M$.
Jos $\alpha = b$, niin $(\alpha, b) \notin R^M$.
Jos $\alpha = c$, niin $(\alpha, b) \notin R^M$.
Jos $\alpha = d$, niin $(\alpha, b) \notin R^M$.
Joten $M \not\models_{s_0} \neg \forall x (R(x,y) \to \neg R(x,z))$.