Logiikan paja, kevät 2011
Tehtäviä viikolle II

Kuvitellaan tilanne missä olemme osoittamassa jotakin väitettä (esimerkiksi tehtävän 8 väitettä) mielivaltaiselle propositiolauseelle A. Olemme osoittaneet että väite pätee jos

a) $A = p_i$

b) $A = (B \vee C)$, missä väite pätee lauseille B ja C.

c) $A = (B \wedge C)$, missä väite pätee lauseille B ja C.

d) $A = (B \rightarrow C)$, missä väite pätee lauseille B ja C.

e) $A = (B \leftrightarrow C)$, missä väite pätee lauseille B ja C.

1. Miksi väite pätee tällöin lauseelle p_0?
   Vastaus: väite pätee a) kohdan mukaan lauseele p_0.

2. Miksi väite pätee tällöin lauseelle $p_{213804623846510394857}$?
   Vastaus: väite pätee a) kohdan mukaan lauseele $p_{213804623846510394857}$.

3. Miksi väite pätee tällöin lauseelle $(p_0 \vee p_2)$?
   Vastaus: väite pätee a) kohdan mukaan lauseele p_0 ja p_2. b) kohdan mukaan väite pätee lauseelle $(p_0 \vee p_2)$.

4. Miksi väite pätee tällöin lauseelle $(p_0 \rightarrow p_2)$?
   Vastaus: väite pätee a) kohdan mukaan lauseele p_0 ja p_2. d) kohdan mukaan väite pätee lauseelle $(p_0 \rightarrow p_2)$.

5. Miksi väite pätee tällöin lauseelle $((p_0 \vee p_2) \wedge (p_0 \rightarrow p_2))$?
   Vastaus: väite pätee a) kohdan mukaan lauseele p_0 ja p_2. b) kohdan mukaan väite pätee lauseelle $(p_0 \vee p_2)$. d) kohdan mukaan väite pätee lauseelle $(p_0 \rightarrow p_2)$. c) kohdan mukaan väite pätee lauseelle $((p_0 \vee p_2) \wedge (p_0 \rightarrow p_2))$.

6. Miksi väite pätee tällöin lauseelle $((p_{12} \leftrightarrow (p_3 \vee p_4)) \wedge p_3)$?
   Vastaus: väite pätee a) kohdan mukaan lauseele p_{12}, p_3, p_4. b) kohdan mukaan väite pätee lauseelle $(p_3 \vee p_4)$. e) kohdan mukaan väite pätee lauseelle $(p_{12} \leftrightarrow (p_3 \vee p_4))$. c) kohdan mukaan väite pätee lauseelle $((p_{12} \leftrightarrow (p_3 \vee p_4)) \wedge p_3)$.

7. Miksi väite ei välttämättä päde lauseelle $(\neg p_3 \wedge p_1)$?
   Vastaus: väite pätee a) kohdan mukaan lauseele p_3 ja p_4. Emme kuitenkaan tiedä päteekö väite lauseelle $\neg p_3$, joten emme voi tietää päteekö väite lauseelle.

8. Osoita että kaikkilla propositiolauseilla on yhtä monta vasenta ja oikeaa sulkua.
   Vastaus: ks. `http://wiki.helsinki.fi/download/attachments/58367694/log1_h1_ratk.pdf`

Kirjoita seuraavat lauseet propositiolauseina. Osoita mitkä ovat pääkonnektiivit ja mitkä välittömät alikaavat.

9. Jos ikkuna on auki, niin huoneessa on kylmä vaikka lämmitin on päällä.
   Vastaus: ks. `http://wiki.helsinki.fi/download/attachments/58367694/log1_h1_ratk.pdf`.

10. Ellei mekanismi ole rikki, valon palaessa ovi on kiinni.
    Vastaus: ks. `http://wiki.helsinki.fi/download/attachments/58367694/log1_h1_ratk.pdf`.

11. Kirjoita seuraava lause propositiolauseena. Onko väite totta (juuri nyt Kumpulassa)?

    - Jos on pilvetöntä ja päivä, niin aurinko paistaa, paitsi jos on meneillään auringonpimennys.
      Vastaus: ks. `http://wiki.helsinki.fi/download/attachments/58367694/log1_h1_ratk.pdf`.

Mitkä seuraavista merkkijonoista ovat propositiolauseita? Yritä perustella vastauksesi.

12. (p_0)
    Vastaus: ks. `http://wiki.helsinki.fi/download/attachments/58367694/log1_h1_ratk.pdf`.

13. $(p_0 \vee (\neg p_0 \rightarrow (p_1 \wedge p_2)))$
    Vastaus: ks. `http://wiki.helsinki.fi/download/attachments/58367694/log1_h1_ratk.pdf`.

14. $((p_0 \to p_1))$
Vastaus: ks. `http://wiki.helsinki.fi/download/attachments/58367694/log1_h1_ratk.pdf`.

15. $(p_0 \to (p_1 \wedge p_2) \to p_3)$
Vastaus: ks. `http://wiki.helsinki.fi/download/attachments/58367694/log1_h1_ratk.pdf`.

16. Millä totuusjakaumilla lause $(p_1 \to (\neg p_0 \to (\neg p_1 \wedge p_2)))$ on totta?
Vastaus: ks. `http://wiki.helsinki.fi/download/attachments/58367694/log1_h1_ratk.pdf`.

Saavatko seuraavat lauseet saman totuusarvon kaikilla totuusjakaumilla?

17. $(p_0 \leftrightarrow (p_1 \leftrightarrow p_2)))$ ja $((p_0 \leftrightarrow p_1) \leftrightarrow p_2)$
Vastaus: ks. `http://wiki.helsinki.fi/download/attachments/58367694/log1_h1_ratk.pdf`.

18. $(p_0 \to (p_1 \to p_2))$ ja $((p_0 \to p_1) \to p_2)$
Vastaus: ks. `http://wiki.helsinki.fi/download/attachments/58367694/log1_h1_ratk.pdf`.

19. Osoita, että $(A \wedge (B \wedge C))$ ja $((A \wedge B) \wedge C)$ ovat loogisesti ekvivalentit.
Vastaus: todistamme loogisen ekvivalenssin totuustaulun avulla ja osoitamme $(A \wedge (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$ tautologiaksi.

20. Osoita, että $(A \vee (B \vee C))$ ja $((A \vee B) \vee C)$ ovat loogisesti ekvivalentit.
Vastaus: todistamme loogisen ekvivalenssin totuustaulun avulla ja osoitamme $(A \vee (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \vee C)$ tautologiaksi.

21. Osoita, että $(A \wedge (B \vee C))$ ja $((A \wedge B) \vee C)$ ovat loogisesti ekvivalentit.
Vastaus: kun $v(A) = v(B) = 0, v(C) = 1$, niin $v((A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee C)) = 0$, joten lauseet eivät ole loogisesti ekvivalentit.

A	B	C	$(A$	$\wedge$	$(B$	$\wedge$	$C))$	$\leftrightarrow$	$((A$	$\wedge$	$B)$	$\wedge$	C	$)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	
1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	
1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	
0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	
0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	
0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
								$\uparrow$						

A	B	C	$(A$	$\vee$	$(B$	$\vee$	$C))$	$\leftrightarrow$	$((A$	$\vee$	$B)$	$\vee$	C	$)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	
1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	
0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	
0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	
0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
								$\uparrow$						

	p_0	$(((((((p_0$	$\mid$	$p_0)$	$\mid$	$p_0)$	$\mid$	$p_0)$	$\mid$	$p_0)$	$\mid$	$p_0)$	$\mid$	$p_0)$	$\mid$	$p_0)$	$\mid$	p_0
$\rightarrow$	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1
$\rightarrow$	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

	p_0	p_1	p_0	$\mid$	p_1
	1	1	1	0	1
$\rightarrow$	1	0	1	1	0
$\rightarrow$	0	1	0	1	1
$\rightarrow$	0	0	0	1	0

22. Osoita, että $(A \vee (B \wedge C))$ ja $((A \vee B) \wedge C)$ ovat loogisesti ekvivalentit.
    Vastaus: kun $v(A) = v(B) = 1, v(C) = 0$, niin $v((A \vee (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \wedge C)) = 0$, joten lauseet eivät ole loogisesti ekvivalentit.

Nyt voit jättä pois sulut peräkkäisten konnektiivien $\wedge$ ja $\vee$ kohdalla, sekä lauseiden uloimmat sulut, silloin kuin se **ei vaikuta lauseen yksiselitteisyyteen**.

Jos lisäämme propositiologiikan konnektiiveihen Shefferin viivan (katso moniste). Millä totuusjakaumilla seuraavat propositiolauseet ovat totta?

23. $p_0|p_1$
    Vastaus: totuustaululla

24. $(p_0|p_1)|(p_0|p_0)$
    Vastaus: kun $v(p_0) = 1$.

25. $(((((((p_0|p_0)|p_0)|p_0)|p_0)|p_0)|p_0)|p_0)|p_0$
    Vastaus: totuustaululla

Ovatko seuraavat lauseet disjunktiivisessa normaalimuodossa?

26. $p_{23542524562465}$
    Vastaus: kyllä.

27. $p_1 \vee p_0$
    Vastaus: kyllä.

28. $p_1 \wedge p_0$
    Vastaus: kyllä.

29. $(p_0 \wedge p_1) \vee (p_0 \wedge p_4)$
Vastaus: kyllä.

30. $(p_0 \vee p_1) \wedge (p_0 \vee p_4)$
Vastaus: ei.

31. $(\neg p_0 \wedge p_1) \vee (p_0 \wedge p_4)$
Vastaus: kyllä.

32. $(\neg p_0 \vee p_1) \wedge (p_0 \vee p_4)$
Vastaus: ei.

Anna seuraaville lauseille ekvivalentti lause disjunktiivisessa normaalimuodossa

33. $p_0 \rightarrow p_1$
Vastaus: totuustaulun riveiltä jolloin lause on tosi saamme, että ekvivalentti lause on $(p_0 \wedge p_1) \vee (\neg p_0 \wedge p_1) \vee (\neg p_0 \wedge \neg p_1)$.

34. $p_0 \wedge (\neg p_1 \leftrightarrow p_2)$
Vastaus: totuustaulun riveiltä jolloin lause on tosi saamme, että ekvivalentti lause on $(p_0 \wedge p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2)$.

35. $p_{24356} \wedge (\neg p_{756} \rightarrow p_0)$
Vastaus: totuustaulun riveiltä jolloin lause on tosi saamme, että ekvivalentti lause on $(p_{24356} \wedge p_{756} \wedge p_0) \vee (p_{24356} \wedge \neg p_{756} \wedge p_0) \vee (p_{24356} \wedge \neg p_{756} \wedge p_0) \vee (p_{24356} \wedge \neg p_{756} \wedge \neg p_0)$.

Anna propositiolause joka määrittelee totuusfunktion

36. $f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x = 0 \text{ tai } y = 1 \\ 1, & \text{muuten.} \end{cases}$
Vastaus: Käytämme hyväksemme disjunktiivista normaalimuotua ja muodostamme lauseen joka määrittelee totuusfunktion f:
$(p_0 \wedge p_1) \vee (\neg p_0 \wedge p_1)$

37. $g(x, y, z) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x > z \\ 1, & \text{muuten.} \end{cases}$
Vastaus: Käytämme hyväksemme disjunktiivista normaalimuotua ja muodostamme lauseen joka määrittelee totuusfunktion g:
$(p_0 \wedge p_1 \wedge p_2) \vee (p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2)$

38. $h(x, y, z) = 0$.
Vastaus: totuusfunktion määrittelee ristiriita, esimerkiksi $p_0 \wedge \neg p_0$.

39. Osoita, että $\{\vee\}$ ei ole universaali konnektiivijoukko.
Vastaus: Todistetaan väite: Jos A on propositiolause, jossa esintyvät konnektiivit ovat joukossa $\{\vee\}$ ja v on totuusjakauma jolla $v(p_i) = 1$ kaikilla i, niin $v(A) = 1$.
Todistus: todistetaan induktiolla lauseen A rakenteen suhteen:
1) $A = p_i$: Tällöin $v(A) = v(p_i) = 1$.
2) $A = B \vee C$: Induktio-oletus: väite pätee lauseille B ja C, eli $v(B) = v(C) = 1$.
Nyt induktio-oletuksen mukaan $v(B) = 1$, joten $v(B \vee C) = v(A) = 1$.

Olemme osoittaneet että kaikilla totuusfunktioilla f jotka on määritelty konnektiivin $\vee$-avulla pätee, että $f(1, ..., 1) = 1$ joten emme pysty määrittelemään esimerkiksi funktiota g jolle $g(1, 1) = 0$, joten $\{\vee\}$ ei ole universaali konnektiivijoukko.