

Logiikan paja, kevät 2011
Ratkaisut viikolle I
Thomas Vikberg

Merkitään propopositiosymboleilla p_i seuraavia atomilauseita:

- p_0 : vettä sataa
- p_1 : tänään on perjantai
- p_2 : olen myöhässä

Valitaan konnektiiveiksi

- \neg , negaatio
- \vee , disjunktio
- \wedge , konjunktio
- \rightarrow , implikaatio
- \leftrightarrow , ekvivalenssi

Kirjoita käyttäen propositiosymboleita, konnektiiveja ja sulkeita propositiologiikan lauseiksi:

1. A : vettä sataa ja tänään on perjantai
2. B : vettä sataa ja olen myöhässä
3. C : tänään on perjantai tai vettä sataa
4. D : vettä sataa tai tänään on perjantai
5. E : tänään ei ole perjantai
6. F : jos tänään on perjantai niin olen myöhässä
7. G : jos en ole myöhässä niin on perjantai
8. H : jos en ole myöhässä niin on perjantai tai vettä sataa

9. I : tänään on perjantai jos ja vain jos tänään on perjantai
 10. J : Olen myöhässä tai en ole myöhässä
 11. K : Vettä sataa ja ei sada vettä

Vastaus: Merkitään $p_0 =$ "vettä sataa", $p_1 =$ "tänään on perjantai", $p_2 =$ "olen myöhässä"

- $A = (p_0 \wedge p_1)$
- $B = (p_0 \wedge p_2)$
- $C = (p_1 \vee p_0)$
- $D = (p_0 \vee p_1)$
- $E = \neg p_1$
- $F = (p_1 \rightarrow p_2)$
- $G = (\neg p_2 \rightarrow p_1)$
- $H = (\neg p_3 \rightarrow (p_1 \vee p_0))$
- $I = (p_1 \leftrightarrow p_1)$
- $J = (p_2 \vee \neg p_2)$
- $K = (p_0 \wedge \neg p_0)$

Osoita ovatko seuraavat merkkijonot propositiolauseita

12. p_3 .
 Vastaus: propositiosymbolit ovat propositiolauseita.
13. koiralla on nälkä.
 Vastaus: kyseessä on väite, joten lause on propositiolause.
14. $x < 0$.
 Vastaus: kyseessä on väite, joten lause on propositiolause.
15. $x + 10$.
 Vastaus: Ei, kyseessä ei ole väitelause.

16. jos f on derivoituva niin se on jatkuva.

Vastaus: kyseessä on väite, joten lause on propositiolause.

17. $(p_0 \wedge p_1)$.

Vastaus: kyseessä on propositiosymboleista, konnektiivista ja suluista muodostettu määritelmän mukainen propositiolause.

18. $(p_0) \wedge (p_1)$

Vastaus: Merkkijono ei sulkujensa puolesta vastaa mitään propositiolauseetta, joten se ei ole sitä.

Oletetaan että L ja M ovat propositiolauseita. Ovatko seuraavat merkkijonot propositiolauseita? Perustele.

19. $(L \rightarrow M)$

Vastaus: kyseessä on propositiolauseista, konnektiivista ja suluista muodostettu määritelmän mukainen propositiolause.

20. $(L) \rightarrow (M)$

Vastaus: Merkkijono ei sulkujensa puolesta vastaa mitään propositiolauseetta, joten se ei ole sitä.

21. $(L \vee M)$

Vastaus: Merkkijono ei sulkujensa puolesta vastaa mitään propositiolauseetta, joten se ei ole sitä.

22. $\neg L$

Vastaus: kyseessä on propositiolauseesta ja konnektiivista muodostettu määritelmän mukainen propositiolause.

23. $(\neg L)$

Vastaus: Merkkijono ei sulkujensa puolesta vastaa mitään propositiolauseetta, joten se ei ole sitä.

Jos totuusjakaumalla v , jolla $v(p_0) = v(p_2) = 1$ ja $v(p_1) = 0$, niin minkä arvon saa

24. $v(\neg p_0)$? Vastaus: $v(\neg p_0) = 0$.

25. $v((p_0 \vee p_2))$? Vastaus: $v((p_0 \vee p_2)) = 1$.

26. $v((p_1 \rightarrow p_0))$? Vastaus: $v((p_1 \rightarrow p_0)) = 1$

27. $v((p_0 \leftrightarrow p_1))$? Vastaus: $v((p_0 \leftrightarrow p_1)) = 0$

Käyttäen totuustaulutekniikkaa tutki kaikkia mahdollisia totuusjakaumia seuraaville lauseille. Merkitse onko lause tautologia, ristiriita tai kontingentti.

28. p_0
Vastaus: kontingentti, perustelut alla.

29. $\neg p_0$
Vastaus: kontingentti, perustelut alla.

30. $(p_0 \wedge p_1)$
Vastaus: kontingentti, perustelut alla.

31. $(p_0 \vee p_1)$
Vastaus: kontingentti, perustelut alla.

32. $(p_1 \rightarrow p_2)$
Vastaus: kontingentti, perustelut alla.

33. $(p_0 \leftrightarrow p_2)$
Vastaus: kontingentti, perustelut alla.

34. A
Vastaus: kontingentti, perustelut alla.

35. C
Vastaus: kontingentti, perustelut alla.

36. D
Vastaus: kontingentti, perustelut alla.

37. I
Vastaus: tautologia, perustelut alla.

38. J
Vastaus: tautologia, perustelut alla.

39. K
Vastaus: ristiriita, perustelut alla.

p_0	$\neg p_0$	$K = (p_0 \wedge \neg p_0)$			
1	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
\uparrow	\uparrow		\uparrow		

p_0	p_1	$(p_0 \wedge p_1)$			A	$(p_0 \vee p_1)$			D	$C = (p_1 \vee p_0)$		
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
			\uparrow		\uparrow		\uparrow		\uparrow		\uparrow	

p_1	p_2	$(p_1 \rightarrow p_2)$		
1	1	1	1	1
1	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	0	0	1	0
			\uparrow	

p_1	$I = (p_1 \leftrightarrow p_1)$		
1	1	1	1
0	0	1	0
		\uparrow	

p_2	$J = (p_2 \vee \neg p_2)$		
1	1	1	1
0	0	1	0
		\uparrow	

p_0	$K = (p_0 \wedge \neg p_0)$		
1	0	0	1
0	0	1	0
		\uparrow	

p_0	p_1	p_2	$(((A \vee B) \rightarrow \neg p_2) \wedge (D \vee \neg C))$										
1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0

40. $((A \vee B) \rightarrow \neg p_2) \wedge (D \vee \neg C)$
Vastaus: kontingentti.

Merkitään kahta totuusjakaumaa v ja v' . Olkoot A_0, \dots, A_{n+2} propositiolauseita. Oletetaan että

$$v'(p_i) = \begin{cases} v(A_i), & i \leq n \\ v(p_i), & i > n. \end{cases}$$

41. Päteekö välttämättä $v'(p_0) = v(A_0)$?
Vastaus: Pätee, kun $n \geq 0$.
42. Päteekö välttämättä $v'(p_n) = v(A_n)$?
Vastaus: Pätee, sillä $n \leq n$.
43. Päteekö välttämättä $v'(p_{n-2}) = v(A_{n-2})$, jos $n > 2$?
Vastaus: Pätee, sillä $n - 2 \leq n$, kun $n > 2$.
44. Päteekö välttämättä $v'(p_{n+2}) = v(A_{n+2})$?
Vastaus: Ei välttämättä päde. Määritelmämme ei vastaa tilanteeseen kun $i = n+2 > n$. Esimerkiksi tilanteessa $v'(p_{n+2}) = 0 \neq 1 = v(A_{n+2})$ väite ei päde.
45. Päteekö välttämättä $v'(p_n) = v(p_n)$?
Vastaus: Ei välttämättä päde. Määritelmämme ei vastaa tilanteeseen kun $i = n$. Esimerkiksi tilanteessa $v'(p_n) = 0 \neq 1 = v(p_n)$ väite ei päde.
46. Päteekö välttämättä $v'(p_{n+2}) = v(p_{n+2})$?
Vastaus: Pätee, sillä $n + 2 > n$.

Oletetaan lisäksi että mielivaltainen propositiolause \widehat{B} on saatu korvaamalla lauseesta B propositiiosymboli p_i lauseella A_i , missä $i = 0, \dots, n$.

Päteekö $v'(B) = v(\widehat{B})$ jos

47. $B = p_0$?

Vastaus: kun $n \geq 0$ niin $\widehat{B} = A_0$. Tällöin väite pätee tehtävän 41 mukaan.

48. $B = p_n$?

Vastaus: Nyt $\widehat{B} = A_n$. Tällöin väite pätee tehtävän 42 mukaan.

49. $B = p_{n+2}$?

Vastaus: Nyt $\widehat{B} = p_{n+2}$. Tällöin väite pätee tehtävän 46 mukaan.

50. $B = p_i$?

Vastaus: Edellä olemme huomanneet, että p_i on joko korvattu lauseella A_i tai että korvausta ei tehdä. Tarkastellaan molempia tapauksia:

1) Jos $i \leq n$. Nyt $\widehat{B} = A_i$ jolloin $v'(B) = v'(p_i) = v(A_i) = v(\widehat{B})$.

2) Jos $i > n$. Nyt $\widehat{B} = p_i$ jolloin $v'(B) = v'(p_i) = v(p_i) = v(\widehat{B})$.

Eli väite pätee kummassakin tapauksessa.

51. $B = \neg C$ ja väite päteelle lauseelle C ?

Vastaus: Väite: $v'(B) = v(\widehat{B})$.

Oletus: $v'(C) = v(\widehat{C})$. (\star kohta jossa oletusta käytetään)

Huomataan, että $\widehat{B} = \widehat{\neg C} = \neg \widehat{C}$.

Nyt $v'(\neg C) = 1$ joss $v'(C) = 0$ joss $v(\widehat{C}) = 0$ joss $v(\neg \widehat{C}) = 1$. Eli olemme saaneet että $v'(B) = v(\widehat{B})$.

52. $B = (C \wedge D)$ ja väite päteelle lauseille C ja D ?

Vastaus: Väite: $v'(B) = v(\widehat{B})$.

Oletus: $v'(C) = v(\widehat{C})$ ja $v'(D) = v(\widehat{D})$. (\star kohta jossa oletusta käytetään)

Huomataan, että $\widehat{B} = \widehat{(C \wedge D)} = (\widehat{C} \wedge \widehat{D})$.

Nyt $v'((C \wedge D)) = 1$ joss $v'(C) = 1$ ja $v'(D) = 1$ joss $v(\widehat{C}) = 1$ ja $v(\widehat{D}) = 1$ joss $v((\widehat{C} \wedge \widehat{D})) = 1$. Eli olemme saaneet että $v'(B) = v(\widehat{B})$.

53. $B = (C \vee D)$ ja väite päteelle lauseille C ja D ?

Vastaus: Väite: $v'(B) = v(\widehat{B})$.

Oletus: $v'(C) = v(\widehat{C})$ ja $v'(D) = v(\widehat{D})$. (\star kohta jossa oletusta käytetään)

Huomataan, että $\widehat{B} = (\widehat{C \vee D}) = (\widehat{C} \vee \widehat{D})$.

Nyt $v'((C \vee D)) = 1$ joss $v'(C) = 1$ tai $v'(D) = 1$ joss $v(\widehat{C}) = 1$ tai $v(\widehat{D}) = 1$ joss $v((\widehat{C} \vee \widehat{D})) = 1$. Eli olemme saaneet että $v'(B) = v(\widehat{B})$.

54. $B = (C \rightarrow D)$ ja väite päteelle lauseille C ja D ?

Vastaus: Väite: $v'(B) = v(\widehat{B})$.

Oletus: $v'(C) = v(\widehat{C})$ ja $v'(D) = v(\widehat{D})$. (★ kohta jossa oletusta käytetään)

Huomataan, että $\widehat{B} = (\widehat{C \rightarrow D}) = (\widehat{C} \rightarrow \widehat{D})$.

Nyt $v'((C \rightarrow D)) = 1$ joss $v'(C) = 1$ tai $v'(D) = 0$ joss $v(\widehat{C}) = 1$ tai $v(\widehat{D}) = 0$ joss $v((\widehat{C} \rightarrow \widehat{D})) = 1$. Eli olemme saaneet että $v'(B) = v(\widehat{B})$.

55. $B = (C \leftrightarrow D)$ ja väite päteelle lauseille C ja D ?

Vastaus: Väite: $v'(B) = v(\widehat{B})$.

Oletus: $v'(C) = v(\widehat{C})$ ja $v'(D) = v(\widehat{D})$. (★ kohta jossa oletusta käytetään)

Huomataan, että $\widehat{B} = (\widehat{C \leftrightarrow D}) = (\widehat{C} \leftrightarrow \widehat{D})$.

Nyt $v'((C \leftrightarrow D)) = 1$ joss joko $v'(C) = 1$ ja $v'(D) = 1$, tai $v'(C) = 0$ ja $v'(D) = 0$ joss joko $v(\widehat{C}) = 1$ ja $v(\widehat{D}) = 1$, tai $v(\widehat{C}) = 0$ ja $v(\widehat{D}) = 0$ joss $v((\widehat{C} \leftrightarrow \widehat{D})) = 1$. Eli olemme saaneet että $v'(B) = v(\widehat{B})$.

56. mielivaltaiselle lauseelle B ?

Vastaus: B voi vain olla muodostettu kuin tehtävissä 50-55, ja olemme osoittaneet että tällöin väite pätee, joten väite pätee mielivaltaiselle B .

57. $B = (p_n \vee \neg p_n)$?

Vastaus: Edellisen tehtävän perusteella pätee, että $v'(B) = v'((p_n \vee \neg p_n)) = v((A_n \vee \neg A_n)) = v(\widehat{B})$. (Huomaamme myös, että koska voimme todistaa B :n tautologiaksi, niin $v'(B) = v(\widehat{B}) = 1$.)

58. Jos B on tautologia ja \widehat{B} on kuin B , mutta propositiosymbolin p_i paikalla on A_i . Onko \widehat{B} tautologia?

Vastaus: Koska B on tautologia pätee, että $v(B) = 1$ kaikilla totuusjakaumilla v . Koska olemme tehtävässä 56 osoittaneet että lauseen totuusarvo on sama mikäli korvaus tehdään, niin saadaan että korvatus lauseen \widehat{B} totuusarvo on 1 kaikilla totuusjakaumilla. Joten lause jossa jorvaukset on tehty, \widehat{B} , on myös tautologia.

59. Onko $(C \vee \neg C)$ tautologia?

Vastaus: olemme tehtävässä 39 osoittaneet että $(p_2 \vee \neg p_2)$ on tautologia, joten jos p_2 korvataan lauseella C , niin lause jossa korvaus on tehty on tehtävän 58 perusteella tautologia.

D	$(D$	\leftrightarrow	\neg	\neg	$D)$
1	1	1	1	0	1
0	0	1	0	1	0
		↑			

60. Onko $(D \leftrightarrow \neg\neg D)$ tautologia?

Vastaus: on.