Logiikan paja 2011
Bonustehtävät

Tehtävät voivat korvata yhden viikon tehtävät

1. Anna luonnollinen päättely predikaattilogiikan lauseelle

$$\forall x(A \to B) \to ((\forall x(B \to C)) \to (\forall x A \to \forall x C))$$

2. Onko lause $\neg(\exists x R_0(c,x) \wedge \exists x \neg R_0(x,c))$ validi, kontingentti vai ristiriita. Anna tarkka perustelu.

3. Anna semanttinen todistus predikaattilogiikan lauseelle

$$\neg(\forall x \forall y R_0(x,y) \wedge \neg \exists x \forall y R_0(x,y))$$

4. Konstruoi lauseen $\exists x_0 \exists x_1 \neg((P_0(x_0) \leftrightarrow \neg P_0(x_1)))$ semanttinen puu, jossa on lopullinen avoin oksa. Konstruoi tämän oksan malli, joka totetuttaa lauseen.

5. Voiko edellisen tehtävän lause toteutua mallissa, jonka universumissa on vähemmän alkioita, kuin edellisen tehtävän puun oksan tuottamassa mallissa?

6. Olkoon aakkosto $L = \{R_0\}$. Määritellään L-malli M asettamalla M:n universumiksi

$$\{x \in \mathbb{R} | -2 < x < 2\}$$

ja

$$R^M = \left\{(x,y) \in R^2 | -2 < x < y \leq 2\right\}$$

Osoita suoraan totuusmääritelmästä, että M toteuttaa lauseen $\neg \exists x_0 \forall x_1 \neg R_0(x_0, x_1)$.

7. Päättele luonnollisella päättelyllä lause $\exists x A \leftrightarrow \neg \forall x \neg A$.

8. Päättele luonnollisella päättelyllä lause $\exists x A$ lauseesta $\neg \forall x \neg A$.

9. Voidaanko lause $\exists x((xEy \wedge xEz) \to (yEz \vee zEy)$ päätellä kaavasta $\exists x(\forall y xEy)$ verkkojen teoriassa?

10. Voidaanko lause $\exists x \exists y \exists z(yEy \to (yEx \wedge xEz))$ päätellä kaavasta $\exists x(\forall y xEy)$ verkkojen teoriassa?

11. Voidaanko lause $\exists x \exists y \exists z (xEy \wedge yEz \wedge zEx)$ päätellä kaavasta $\exists x (\forall y xEy)$ verkkojen teoriassa?

12. Voidaanko $\neg \forall y \exists z (y = z))$ päätellä kaavoista $\forall y \forall z (y = z)$ ja $\neg (x = z)$ käyttäen identiteettiaksioomia?

13. Onko lauseelle $\exists x P(x)$ olemassa luonnollinen päättely lauseesta $\forall x P(x)$? Perustele myös sanallisesti.

14. Osoita, että mikäli päättely kaavasta A kaavan B on eheä, niin kaava $A \rightarrow B$ on validi käyttämättä eheyslausetta.

15. Osoita, että mikäli kaavan A päättelyn oletuksissa x ei ole vapaa muuttuja niin, jos mallissa M tulintajonolla s, A toteutuu, niin myös $\forall x A$ toteutuu käyttämättä eheyslausetta.