Ratkaisuehdotuksia
Logiikan paja 2011
Bonustehtävät 5-6

5. Tutkitaan Tarskin totuusmääritelmällä lausetta $\exists x_0 \exists x_1 \neg(P_0(x_0) \leftrightarrow P_0(x_1))$.

$$M \models_s \exists x_0 \exists x_1 \neg((P_0(x_0) \leftrightarrow P_0(x_1)))$$

joss, on olemassa $\alpha \in M$

$$M \models_{s(\alpha/x)} \exists x_1 \neg(P_0(x_0) \leftrightarrow P_0(x_1))$$

joss, on olemassa $\alpha \in M$ ja on olemassa $\beta \in M$

$$M \models_{s(\alpha/x_0)(\beta/x_1)} \neg(P_0(x_0) \leftrightarrow P_0(x_1))$$

joss, on olemassa $\alpha \in M$ ja on olemassa $\beta \in M$

$$M \not\models_{s(\alpha/x_0)(\beta/x_1)} (P_0(x_0) \leftrightarrow P_0(x_1))$$

joss, on olemassa $\alpha \in M$ ja on olemassa $\beta \in M$

$$M \not\models_{s(\alpha/x_0)(\beta/x_1)} P_0(x_0) \text{ ja } M \models_{s(\alpha/x_0)(\beta/x_1)} P_0(x_1)$$

tai

$$M \models_{s(\alpha/x_0)(\beta/x_1)} P_0(x_0) \text{ ja } M \not\models_{s(\alpha/x_0)(\beta/x_1)} P_0(x_1)$$

joss, on olemassa $\alpha \in M$ ja on olemassa $\beta \in M$

$$\alpha \notin P_0^M \text{ ja } \beta \in P_0^M, \text{ tai, } \alpha \in P_0^M \text{ ja } \beta \notin P_0^M.$$

Huomaamme, että mallissa pitää olla vähintään kaksi alkiota, yksi joka kuuluu osajoukkoon P_0 ja toinen joka ei kuulu, jotta kaava voisi totetua mallissa.

6. Nähdään, että kaikille $\alpha \in M$ on olemassa $\beta = \dfrac{2-\alpha}{2} \in M$, jolloin $\alpha < \beta$. Joten kaikilla

$\alpha \in M$ on olemassa $\beta \in M$ siten, että, $(\alpha, \beta) \in R_0^M$. Joten Tarskin totuusmääritelmän mukaan

$$M \models_{s(\alpha/x_0)(\beta/x_1)} R_0(x_0, x_1)$$

eli

$$M \not\models_{s(\alpha/x_0)(\beta/x_1)} \neg R_0(x_0, x_1)$$

eli

$$M \not\models_{s(\alpha/x_0)} \forall x_1 \neg R_0(x_0, x_1)$$

eli

$$M \not\models_{s} \exists x_0 \forall x_1 \neg R_0(x_0, x_1)$$

eli

$$M \models_{s} \neg \exists x_0 \forall x_1 \neg R_0(x_0, x_1)$$