Lineaariset mallit, kl 2011, Harjoitus 4, viikko 15

1. Tarkastellaan lineaarista mallia $\mathbf{Y} \sim \mathsf{N}\left(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{I}_n\right)$ $(\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p,\ \sigma^2 > \mathbf{0},\ \mathsf{r}(\mathbf{X}) = p)$. Osoita, että parametrivektorin $\left[\boldsymbol{\beta}' \quad \sigma^2\right]'$ Fisherin informaatiomatriisi

$$\mathbf{i}\left(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\right) = E\begin{bmatrix} -\partial^2 l\left(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2; \mathbf{Y}\right)/\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}' & -\partial^2 l\left(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2; \mathbf{Y}\right)/\partial\boldsymbol{\beta}\partial\sigma^2 \\ -\partial^2 l\left(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2; \mathbf{Y}\right)/\partial\sigma^2\partial\boldsymbol{\beta}' & -\partial^2 l\left(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2; \mathbf{Y}\right)/\partial\sigma^2\partial\sigma^2 \end{bmatrix}$$

on

$$\mathbf{i}\left(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\right) = \begin{bmatrix} \sigma^{-2}\mathbf{X}'\mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & n/2\sigma^4 \end{bmatrix}.$$

(*Vihje*: Kannattaa ehkä laskea ensin $\partial l\left(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2; \mathbf{y}\right)/\partial\boldsymbol{\beta}$ kuten $\partial\mathsf{S}(\boldsymbol{\beta})/\partial\boldsymbol{\beta}$ monisteen s. 7 ja sen jälkeen $\partial^2 l\left(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2; \mathbf{y}\right)/\partial\boldsymbol{\beta}\partial\sigma^2$ ja edelleen vastaavan satunnaisvektorin odotusarvo. $\partial^2 l\left(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2; \mathbf{y}\right)/\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}'$ saadaan lasketuksi kuten $\partial^2\mathsf{S}(\boldsymbol{\beta})/\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}'$ (ks. monisteen s. 8) ja $\partial^2 l\left(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2; \mathbf{y}\right)/\partial\sigma^2\partial\sigma^2$ vaatii pelkästään derivointia reaalisen muuttujan σ^2 suhteen. Huomaa myös symmetrisyys.)

2. Olkoon oikea (täysiasteinen) malli $\mathbf{Y} = \mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}$ $(\boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathsf{N}\left(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I}_n\right)$, $\boldsymbol{\beta}_1 \in \mathbb{R}^{p_1}$, $\boldsymbol{\beta}_2 \in \mathbb{R}^{p_2}$, $\sigma^2 > \mathbf{0}$). Oletetaan, että $\boldsymbol{\beta}_1$ estimoidaan kuitenkin käyttäen mallia, josta $\mathbf{X}_2$ on jätetty pois (eli malliyhtälö on $\mathbf{Y} = \mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_*$). Laske näin saadun $\boldsymbol{\beta}_1$:n PNS-estimaattorin odotusarvo ja selvitä myös sen todennäköisyysjakauma? Milloin tämä estimaattori on harhaton?

3. Tarkastellaan kahta riippumatonta lineaarista mallia

$$\mathbf{Y}_i = \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_i \sim \mathsf{N}_{n_i}\left(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I}_{n_i}\right), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_1 \perp\!\!\!\perp \boldsymbol{\varepsilon}_2, \quad \boldsymbol{\beta}_i \in \mathbb{R}^p, \ \sigma^2 > \mathbf{0}, \ \mathsf{r}(\mathbf{X}_i) = p, \ i = 1, 2.$$

Muodosta näistä matriiseja käyttäen yksi malli ja esitä parametrin $\boldsymbol{\beta} = \left[\boldsymbol{\beta}_1' \quad \boldsymbol{\beta}_2'\right]'$ PNS-estimaattorin lauseke. Mikä on saadun PNS-estimaattorin jakauma?

Aputulos: Jos $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ ovat epäsingulaarisia neliömatriiseja, niin

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix}.$$

4. Tarkastellaan kahden riippumattoman normaalisen otoksen mallia

$$Y_1, ..., Y_n \perp\!\!\!\perp, \ Y_i \sim \begin{cases} \mathsf{N}\left(\mu_1, \sigma^2\right), & \text{kun } i = 1, ..., n_1 \\ \mathsf{N}\left(\mu_2, \sigma^2\right), & \text{kun } i = n_1 + 1, ..., n_1 + n_2 = n \end{cases}$$

$(\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0, n_1, n_2 > 1)$. Estimoi parametrit μ_1 ja μ_2 ehdolla $\mu_1 = \mu_2$ (i) käyttäen monisteessa (s. 16) esitettyä rajoitetun PNS-estimaattorin kaavaa (2.8) ja (ii) ottamalla ehto $\mu_1 = \mu_2$ huomioon mallissa ja estimoimalla saadun mallin parametrit (eli käyttäen olennaisesti yhtälöön (2.9) perustuvaa vaihtoehtoista menettelyä).