Lineaariset mallit, kl 2011, Harjoitus 2, viikko 13

1. Neliömatriisin jälki on sen diagonaalialkioiden summa eli, jos $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ on $n \times n$ matriisi, niin sen jälki on $\mathsf{tr}\,(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Osoita, että (i) $\mathsf{tr}\,(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathsf{tr}\,(\mathbf{A}) + \mathsf{tr}\,(\mathbf{B})$ (ii) $\mathsf{tr}\,(\mathbf{AB}) = \mathsf{tr}\,(\mathbf{BA})$ ja (iii) $\mathsf{tr}\,(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$:n ominaisarvojen summa, kun $\mathbf{A}$ on symmetrinen. (*Vihje*: Viimeisessä kohdassa voit käyttää symmetrisen matriisin pääakselihajotelmaa; ks. monisteen Liite B.7)

2. Olkoon neliömatriisi $\mathbf{A}$ $(n \times n)$ ortogonaalinen projektio eli symmetrinen $(\mathbf{A} = \mathbf{A}')$ ja idempotentti $(\mathbf{A} = \mathbf{A}^2)$. Osoita, että $\mathbf{A}$ on positiivisesti semidefiniitti eli $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$ $\forall\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ja että $\mathbf{A}$:n aste $=$ $\mathbf{A}$:n jälki eli $\mathsf{r}(\mathbf{A}) = \mathsf{tr}\,(\mathbf{A})$. (*Vihje*: Pääakselihajotelma ja HT 1.3)

3. Esitä yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin $Y_1, ..., Y_n \ \underline{\|}\ , Y_i \sim \mathsf{N}\left(\beta_1 + \beta_2 x_i, \sigma^2\right)$ normaaliyhtälöt komponenttimuodossa (ilman matriiseja) ja osoita, että niiden ratkaisuna saatavat PNS-estimaatit voidaan lausua muodossa

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \qquad \text{ja} \qquad \hat{\beta}_1 = \bar{y} - \hat{\beta}_2 \bar{x},$$

jossa esimerkiksi $\bar{y} = (y_1 + \cdots + y_n)/n$. Esitä $\hat{\beta}_2$ käyttäen havainnoista (y_i, x_i), $i = 1, ..., n$, laskettuja keskihajontoja ja korrelaatiokerrointa. (*Huom.*: Havaintojen korrelaatiokertoimen määritelmä löytyy monisteen s. 11 alaviitteestä ja esim. y-havaintojen keskihajonta on $s_y = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}$.)

4. (Jatkoa tehtävälle 1.5) (i) Johda tehtävän 1.5 varianssianalyysimallissa parametrien $\mu_1, ..., \mu_p$ PNS-estimaattien lausekkeet normaaliyhtälöiden ratkaisukaavaa käyttäen.
(ii) Johda PNS-estimaattorien odotusarvot, varianssit ja kovarianssit eli odotusarvovektori ja kovarianssimatriisi.

5. Kun $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on derivoituva ja $f_1, ..., f_m$ sen komponenttifunktiot, määritellään

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_m(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

(i) Olkoon $\mathbf{A}$ kiinteä $m \times n$ matriisi ja $\mathbf{x}$ $n \times 1$ vektori. Perustele huolellisesti derivointisääntö

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}.$$

(ii) Johda monisteen sivulla 8 viitattu tulos (monisteen merkinnöillä)

$$\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}'} \mathsf{S}(\boldsymbol{\beta}) = 2\mathbf{X}'\mathbf{X}.$$

(*Vihje*: Sovella (i)-kohdan derivointisääntöä.)