Esim. Tutkitaan erään bussityypin keskikulutusta (litraa/100 km) kaupunkiliikenteessä. Oletetaan, että kulutus vaihtelee likimain normaalisti bussiyksilön ja ajoreitin mukaan. Tehtiin 20 kulutusmittausta satunnaisesti valituilla busseilla ja reiteillä: niiden keskiarvo oli 36 ja keskihajonta 3.5 (litraa/100 km). Muodosta keskikulutukselle 95 %:n ja 99 %:n lv:t.

Ratkaisu: Olkoon μ keskikulutus, jolloin kyseessä on $n = 20$ riippumatonta havaintoa $N(\mu, \sigma^2)$-jakaumasta (jossa μ:n lisäksi myös σ^2 tuntematon).

Aineistosta laskettu: $\bar{x} = 36$, $s = 3.5$

95 %:n luottamustasolla ($\alpha = 0.05$) on

$$t_{19}(0.025) \overset{\text{taulukosta}}{\approx} 2.093 \;, \quad t_{19}(0.025)\frac{s}{\sqrt{n}} \approx 1.64 \approx 1.6$$

$$\Rightarrow \text{lv on } (36 - 1.6,\ 36 + 1.6) = (34.4,\ 37.6)$$

99 %:n luottamustasolla ($\alpha = 0.01$) on

$$t_{19}(0.005) \approx 2.861 \,, \quad t_{19}(0.005)\frac{s}{\sqrt{n}} \approx 2.24 \approx 2.2$$

$$\Rightarrow \text{lv on } (36 - 2.2,\ 36 + 2.2) = (33.8,\ 38.2)$$

Huom. Luottamusvälin tulkinnosta:

* Yhtälössä $P\left(\bar{X} - t_{n-1}(\alpha/2)\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{n-1}(\alpha/2)\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$ tn:n käsite liittyy aineistoon (sm:ien $\bar{X}$ ja S kautta): pisteiden $\bar{X} \pm t_{n-1}(\alpha/2)\, S/\sqrt{n}$ rajoittama satunnainen väli peittää μ:n (= kiinteä mutta tuntematon piste) tn:llä $1-\alpha$.

* Toistetun aineistonkeruun kannalta: jos aineistonkeruu toistetaan uudelleen ja uudelleen ja jokaisesta aineistosta lasketaan luottamusväli (##), saaduista väleistä keskimäärin osuus $1-\alpha$ sisältää μ:n ja osuus α "menee ohi".

<u>Lisätietoa: Mistä t-jakauma tulee?</u> (aineopintojen tn-laskennan kurssi!)

Olet. $Z \sim N(0,1)$ ja $Y \sim \chi^2_m$ (khii-toiseen-jakauma, m vapausastetta) sekä $Z \perp\!\!\!\perp Y$.

<u>Määritelmä</u>: Sm:n $T = \dfrac{Z}{\sqrt{Y/m}}$ noudattama jakauma on <u>t-jakauma</u>, jolla m <u>vapausastetta</u>; merk. $T \sim t_m$.

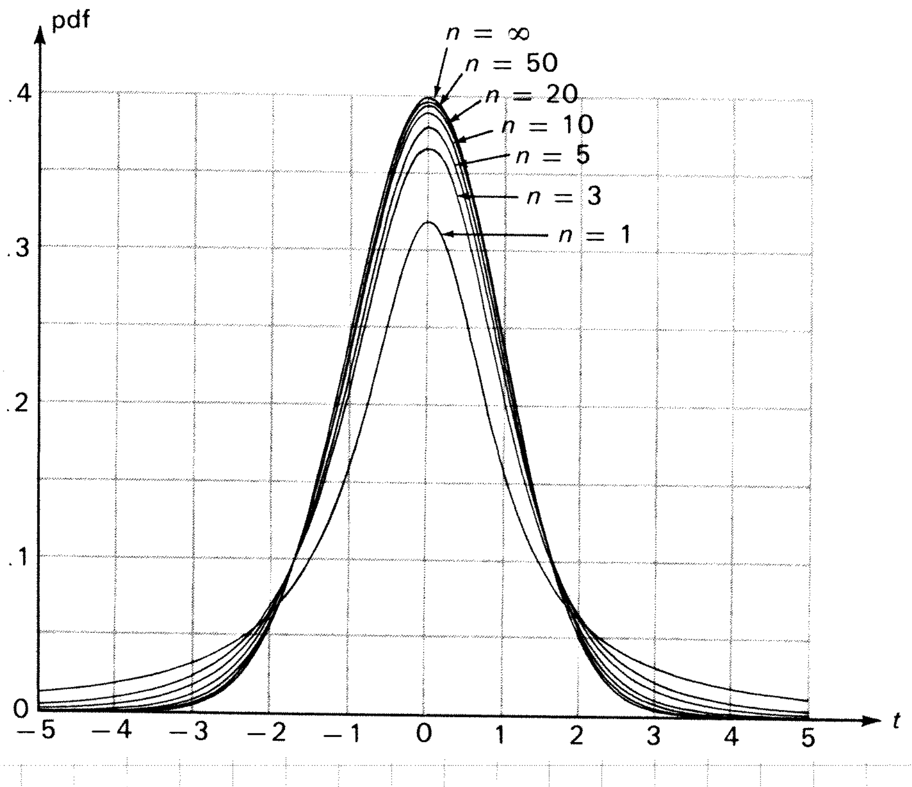
Tark. mallia $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\perp\!\!\!\perp$. Olkoot

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}, \quad Y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

Sivulla 16 on todettu, että $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ eli $Z \sim N(0,1)$ ja $Y \sim \chi^2_{n-1}$ sekä $Z \perp\!\!\!\perp Y$. Siispä yo. määritelmän nojalla

$$T = \frac{Z}{\sqrt{Y/(n-1)}} = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

(kuten sivulla 22 väitettiin!)



<u>KUVA</u>

t_n-jakauman tiheysfunktioita eri n:n arvoilla

$n = \infty$ tark. $N(0,1)$-jakaumaa

7. TESTITEORIAA NORMAALIJAKAUMALLE

[vrt. Arjas-Sirén, jaksot 4.1-4.3]

Esim. (jatkoa bussiesimerkkiin, s. 23)

Valmistaja on väittänyt, että keskikulutus on (korkeintaan) 34. Kokeessa (s. 23) havaitsimme (otoskoko $n = 20$), että keskikulutus oli $\bar{x} = 36$ ja $s = 3.5$.

Miten suhtautua valmistajan väitteeseen "$\mu = 34$" ja saatuun koetulokseen ?

a) Tekikö sattuma vain meille kiusaa ?

b) Vai onko väite "$\mu = 34$" syytä hylätä ja päätellä, että $\mu > 34$?

Idea: Jos $\bar{x}$ on "paljon suurempi" kuin 34, päädymme (b):hen. Mitä on "paljon suurempi" ? Onko $\bar{x} = 36$ sellainen ?

Olet. hetkeksi, että $\mu = 34$ (so. valmistajan väite pätee). Tark. sat. muuttujaa

$$T = \frac{\bar{X} - 34}{S/\sqrt{20}} \quad , \quad \text{joka} \sim t_{19} \quad (\text{s. 22 mukaan})$$

Nyt käsillä olevassa tapauksessa tämän havaittu arvo on

$$t = \frac{\bar{x} - 34}{s/\sqrt{20}} = \frac{36 - 34}{3.5/\sqrt{20}} \approx 2.56$$

t_{19} - jakauman taulukon mukaan (ks. esim. 3. harjoitukset) näin iso tai vielä isompi T:n arvo saadaan (edelleen olettaen että $\mu = 34$) tn:llä

$$P(T \geq 2.56) < 0.01$$

[taulukon mukaan $P(T \geq 2.539) \approx 0.01$]

Siis alle 1 % !

Johtopäätös: Vaihtoehto (a) ei ole kovin uskottava vaan päädymme (b):hen. Virheellisen päätelmän riski on alle 1 %.

Yo. menettely on esimerkki <u>tilastollisesta testaamisesta</u>, tarkemmin ns. t-testistä. Esittelemme sen lyhyesti.

<u>t-testi normaalijakauman odotusarvolle</u>

Mallina edelleen $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\perp\!\!\!\perp$
(sekä μ että σ^2 tuntemattomia parametreja)

On formuloitu <u>hypoteesit</u>

$$(*) \quad \begin{cases} H_0 : \ \mu = \mu_0 \quad (\text{tai } \mu \le \mu_0) & \underline{\text{nollahypoteesi}} \\ H_1 : \ \mu > \mu_0 & \underline{\text{vastahypoteesi}} \end{cases}$$

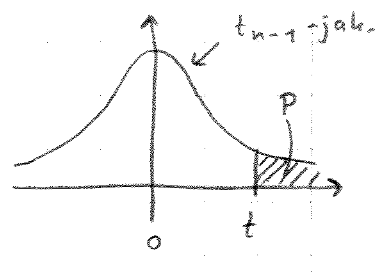
Havaitun aineiston $\underset{\sim}{x} = (x_1, \dots, x_n)$ perusteella on <u>testattava</u>, voidaanko H_0:aa pitää totena vai onko $\underset{\sim}{x}$ ristiriidassa sen kanssa ja tukee paremminkin H_1:tä.

Muodostetaan <u>t-testisuure</u>

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}, \quad \text{jossa} \quad \begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \\ s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \end{cases}$$

Tämän suuret (positiiviset) arvot ovat <u>kriittisiä</u> H_0:lle ja tukevat H_1:tä !

<u>Jos H_0 pätee</u> eli $\mu = \mu_0$, vastaava sm T noudattaa t_{n-1}-jakaumaa (ks. s. 22). Tällöin voidaan laskea tn



$$p = P_{H_0}(T \ge t)$$

t_{n-1}-jakauman "oikeana häntätodennäköisyytenä"
(merkintä P_{H_0} korostaa että kyseinen tn lasketaan olettaen että H_0 pätee)

p on nimeltään testin <u>p-arvo</u>.

Tulkinta: Jos p on hyvin pieni, nyt havaitunlainen — tai vielä suurempi eli "kriittisempi" — t-testisuureen arvo on H_0:n pätiessä hyvin epätodennäköinen. Tällöin H_0 voidaan hylätä ja H_1 hyväksytään

Yleensä verrataan p:tä ennaltavalittuun merkitsevyystasoon α (tyypillisesti 0.05 tai 0.01). Jos $p \le \alpha$, sanotaan, että H_0 hylätään (ja H_1 hyväksytään) merkitsevyystasolla α. Muuten H_0 jää voimaan.

(Yleensä H_0 edustaa "neutraalia" tai "oletusarvoista" asiaintilaa, joten sen hylkäämiseen vaaditaan kyllin "vahva näyttö": virheellisen hylkäyspäätöksen riski α on siksi aiheellista valita varsin pieneksi.)

Esim. Sivun 24 esimerkissä oli $H_0: \mu = 34$ ja $H_1: \mu > 34$. Havaittiin t-testisuureen arvo $t \approx 2.56$ ja p-arvo $p = P_{H_0}(T \ge 2.56)$ oli alle 0.01, joten H_0 voitiin hylätä ja H_1 hyväksyä vaikkapa merkitsevyystasolla $\alpha = 0.01$.

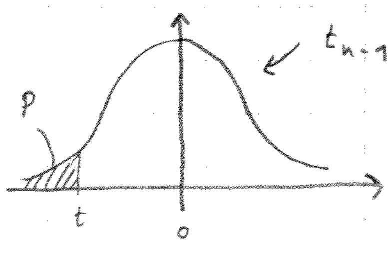
Hypoteesien vaihtoehtoisia muotoja:

1. Jos ⊛:n sijasta hypoteesit ovat muotoa

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \quad (\text{tai } \mu \ge \mu_0) \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{cases}$$

H_0:lle kriittisiä ja H_1:tä tukevia ovat t:n pienet (voimakkaasti negatiiviset) arvot. Tällöin p-arvo on "vasen häntätodennäköisyys"

$$p = P_{H_0}(T \le t)$$



Muuten menetellään kuten edellä.