Johdatus tilastolliseen päättelyyn – kurssikoe 10. 5. 2010

Huom. Omia taulukoita ja kaavakirjoja ei saa käyttää!

1. Tarkastellaan n-kertaista riippumatonta toistokoetta, jossa kunkin toiston onnistumistodennäköisyys on $0 < \theta < 1$. Olkoon T onnistumisten lukumäärä.

   a) Mitä jakaumaa T noudattaa (jakauman nimi), ja mikä on kyseisen jakauman pistetodennäköisyysfunktio?

   b) Oletetaan, että $n = 10$ ja havaittiin $T = 4$ onnistumista. Muodosta tätä havaintoa vastaava uskottavuusfunktio parametrille θ ja etsi suurimman uskottavuuden estimaatti $\hat{\theta}$.

2. Dialyysipotilaalta mitataan veren fosfaattipitoisuus kullakin klinikkakäynnillä. Oletetaan, että pitoisuudet vaihtelevat likimäärin normaalijakauman mukaan ja että eri käynneillä tehtyjä mittauksia voidaan pitää toisistaan riippumattomina. Kuudella klinikkakäynnillä tehtyjen mittausten keskiarvo oli 5.2 ja keskihajonta 1.1 (milligrammaa desilitrassa).

   a) Määritä 90 %:n luottamusväli tämän potilaan keskimääräiselle fosfaattitasolle.

   b) Onko seuraava väite oikein vai väärin: 90 %:n luottamusväli tarkoittaa sitä, että mikäli tehdään suuri määrä fosfaattipitoisuuden mittauksia tarkasteltavasta potilaasta, noin 90 % mittaustuloksista sijaitsee kyseisellä välillä. Perustele lyhyesti.

   Ohessa on t-jakauman oikeanpuoleisten häntätodennäköisyyksien taulukko (f = vapausasteiden lukumäärä).

3. A:lla on kaksi noppaa, joista noppa numero yksi on nelitahoinen (jonka silmäluvut ovat 1, 2, 3 ja 4) ja noppa numero kaksi on tavallinen noppa (silmäluvut 1–6). Kumpikin nopista on harhaton, eli heiton tuloksena saadaan aina yksi silmäluvuista, ja todennäköisyys saada mikä tahansa kyseisen nopan silmäluku on sama. A valitsee nopista satunnaisesti yhden siten, että kummankin todennäköisyys on yhtä suuri. A heittää valitsemaansa noppaa ja paljastaa, että tulokseksi saatiin silmäluku kolme. Sinun tehtäväsi on päätellä, kumman nopan A valitsi.

   a) Muotoile tehtävän tilanne siten, että kerrot, mikä on tuntematon parametri, mikä on sen priorijakauma ja mikä on havaintoa vastaavan satunnaismuuttujan ehdollinen jakauma ehdolla parametri (eli otantajakauma).

   b) Ratkaise vielä posteriorijakauma, eli laske todennäköisyys, että A valitsi nelitahoisen nopan (ehdolla havaittu silmäluku kolme).

4. Erään englantilaisen ydinjätteen jälleenkäsittelylaitoksen läheisyydessä ilmaantui (tiettynä ajanjaksona) neljä lapsuusiän leukemiatapausta. Tämä herätti huolta, sillä havainto on 16-kertainen verrattuna koko väestöstä kerättyjen rekisteritietojen perusteella odotettavaan lukuun 0.25. Eräs epidemiologian asiantuntija mallintaa tilanteen pitämällä lukua neljä sellaisen satunnaismuuttujan havaittuna arvona, jolla on Poisson-jakauma odotusarvolla $0.25\,\theta$, jossa θ on tuntematon parametri. Asiantuntijan ennakkokäsitystä θ:n arvosta kuvaa gammajakauma $\mathrm{Gamma}(\alpha_0, \lambda_0)$, jossa $\alpha_0 = \lambda_0 = 3.4$. Mikä on asiantuntijan posteriorijakauma ja posteriorijakauman odotusarvo?

   Muistin tueksi: Jos Poisson-jakauman odotusarvo on $\mu > 0$, niin sen pistetodennäköisyysfunktio on

   $$f(k) = \mathrm{e}^{-\mu}\,\frac{\mu^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

   Gammajakauma parametreilla $\alpha > 0$ ja $\lambda > 0$ on positiivisella reaaliakselilla määritelty jatkuva jakauma, jonka tiheysfunktio on, vakiokerrointa vaille, muotoa $x^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$, kun $x > 0$. Gammajakauman odotusarvo on α/λ.

TABLE 2

Student(f)distribution: right-tail percentage points t_α; $\alpha = P(t \geq t_\alpha)$

f \ α	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
$N(0, 1)$ ∞	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576