Johdatus tilastolliseen päättelyyn
Harjoitus 5 (18.–20. 4. ja 28.–29. 4. 2011)

1. Kulhossa on $N = 5$ palloa, joista K on valkoista ja loput mustia. Et tiedä K:n arvoa, mutta ennakkokäsityksesi mukaan kaikki kuusi vaihtoehtoa $K = k$ (jossa $k = 0, 1, 2, 3, 4$ tai 5) ovat yhtä todennäköisiä. Nostat silmät sidottuna kulhosta yhden pallon kerrallaan siten, että ennen kutakin nostoa pallot palautetaan kulhoon ja kulhoa ravistetaan perusteellisesti. Kunkin noston jälkeen saat tietää nostamasi pallon värin. Kolmessa ensimmäisessä nostossa saat tulokseksi värit valkoinen, musta ja valkoinen tässä järjestyksessä.

   Laske ennustetodennäköisyys sille, että seuraava nostettava pallo on valkoinen.

2. Kulhossa on aluksi 5 palloa, joista K on valkoista ja loput mustia. Parametrin K priorijakauma on jälleen diskreetti tasajakauma joukossa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Taas palloja nostetaan perusteellisen ravistelun jälkeen kulhosta, mutta tällä kertaa mitään nostettua palloa ei palauteta kulhoon. Kolmessa ensimmäisessä nostossa saat tulokseksi värit valkoinen, musta ja valkoinen tässä järjestyksessä.

   Laske parametrin posteriorijakauma. Laske lisäksi ennustetodennäköisyys sille, että seuraava nostettava pallo on valkoinen.

   Varoitus: kun poimitaan palauttamatta, niin eri nostokerrat eivät ole ehdollisesti riippumattomia; lisäksi tässä esimerkissä luentojen positiivisuusoletus ei ole voimassa. Tästä syystä tehtävän ratkaiseminen vaatii tavallista suurempaa huolellisuutta.

3. Nastaa helistettiin lasipurkissa kymmenen kertaa. Se päätyi kolme kertaa selälleen ja seitsemän kertaa kyljelleen. Parametrina on todennäköisyys, jolla nasta päätyy selälleen. Priorijakauma on tasajakauma välillä $(0, 1)$. Laske posteriorijakauma sekä sen odotusarvo ja varianssi. (Sovella seuraavassa tehtävässä johdettavia betajakauman ominaisuuksia.)

4. (Betajakauman ominaisuuksia.) Olkoon satunnaismuuttujalla Y betajakauma parametreillä $\alpha, \beta > 0$, jolloin sen tiheysfunktio $f(y) = y^{\alpha-1}\,(1-y)^{\beta-1}/B(\alpha,\beta)$, kun $0 < y < 1$ (ja nolla muualla). Näytä, että Y:n odotusarvo $EY = \alpha/(\alpha+\beta)$ sekä laske Y:n toinen momentti $EY^2 = \int_0^1 y^2\, f(y)\,\mathrm{d}y$. Osoita kaavaa $\operatorname{Var} Y = EY^2 - (EY)^2$ käyttämällä, että

   $$\operatorname{Var} Y = \frac{\alpha\,\beta}{(\alpha+\beta)^2\,(\alpha+\beta+1)}.$$

   Opastus: tehtävä ratkeaa soveltamalla kaavoja

   $$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \qquad \forall x, y > 0.$$
   $$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z), \qquad \forall z > 0.$$

   Näistä ensimmäinen kertoo yhteyden betafunktion ja gammafunktion

   $$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x, \qquad t > 0$$

   välillä, ja toista kutsutaan gammafunktion funktionaaliyhtälöksi. (Tämän tehtävän kaavoja on tarpeetonta yrittää opetella ulkoa tämän kurssin tenttiä varten.)

KÄÄNNÄ!

5. Olkoon satunnaismuuttujalla X Poissonin jakauma parametrilla θ, joka on Poissonin jakauman odotusarvo. Tulkitsemme tuntemattoman parametrin satunnaismuuttujaksi sekä kuvaamme sen arvoon liittyvää epävarmuutta käyttämällä priorijakaumaa Gamma(α, λ), jossa gammajakauman tiheysfunktio on (normalisointivakiota vaille) muotoa

$$f(y) = c\, y^{\alpha-1}\, \mathrm{e}^{-\lambda y}, \qquad y > 0,$$

(ja kirjoittamatta jätetty vakio on $c = \lambda^\alpha / \Gamma(\alpha)$). Tässä $\alpha > 0$ ja $\lambda > 0$ ovat joitakin tunnettuja vakioita.

Saamme havainnon $X = x$ (jossa $x \geq 0$ on kokonaisluku). Osoita, että posteriorijakauma on tietty gammajakauma sekä laske kyseisen gammajakauman parametrit.