Johdatus tilastolliseen päättelyyn
Harjoitus 4 (11.–15. 4. 2011)

1. Tarkastelemme perusjoukkoa Ω, sen osajoukkoja $A, B, A_1, A_2, \ldots$ jotka ovat tapahtumia sekä todennäköisyyttä P. Oletamme, että $P(B) > 0$. Todista, että (tapahtumien joukossa määritelty) ehdollinen todennäköisyys $A \mapsto P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B)$ on todennäköisyys tarkistamalla seuraavat ominaisuudet.

   a) $P(A \mid B) \geq 0$ kaikille tapahtumille A.

   b) $P(\Omega \mid B) = 1$.

   c) (Äärellinen additiivisuus:) Jos A_1 ja A_2 ovat erillisiä tapahtumia (ts. $A_1 \cap A_2 = \emptyset$), niin
   $$P(A_1 \cup A_2 \mid B) = P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B).$$

   Huomautuksia: Vastaavat ehdot pätevät ei-ehdolliselle todennäköisyydelle: ehdot a) ja b) ovat Tuomisen kirjan Todennäköisyyslaskenta I ehdot TN_1 ja TN_2; ehto c) on erikoistapaus Tuomisen ehdosta TN_3. (Myös täysadditiivisuus eli Tuomisen ehto TN_3 pätee ehdolliselle todennäköisyydelle.) Näiden tarkistusten jälkeen voimme käyttää kaikkia ei-ehdolliselle todennäköisyydelle johdettuja laskukaavoja myös ehdolliselle todennäköisyydelle!

2. Olkoot A, B ja C tapahtumia siten, että $P(A \cap B \cap C) > 0$. Tarkista, että

   a) kertolaskukaava yleistyy kolmelle tapahtumalle muodossa
   $$P(A \cap B \cap C) = P(A)\, P(B \mid A)\, P(C \mid A \cap B),$$

   b) ehdollisen todennäköisyyden kertolaskukaava (kahdelle tapahtumalle) on voimassa, eli
   $$P(A \cap B \mid C) = P(A \mid C)\; P(B \mid A \cap C).$$

   (Ehdon $P(A \cap B \cap C) > 0$ merkitys: inkluusiosta $A_1 \subset A_2$ seuraa aina $P(A_1) \leq P(A_2)$ (todennäköisyyden monotonisuus). Tämän takia tehtävässä tarvittavat ehdolliset todennäköisyydet ovat hyvin määriteltyjä, sillä $0 < P(A \cap B \cap C)$ ja leikkaus $A \cap B \cap C$ sisältyy kaikkiin tehtävän ehtotapahtumiin.)

3. Oletamme, että satunnaismuuttujilla X, Y ja K on diskreetti jakauma ja että niiden yhteis-ptnf toteuttaa luentojen s. 39 positiivisuusoletuksen:
   $$P(X = x, Y = y, K = k) > 0 \quad \text{kaikilla } x, y, k.$$

   Sana "kaikilla" tarkoittaa kaikilla $x \in S_X$, kaikilla $y \in S_Y$ ja kaikilla $k \in S_K$. Tässä S_X on satunnaismuuttujan X arvojoukko (ts. X voi saada arvoja vain joukosta S_X), S_Y on Y:n arvojoukko ja S_K on K:n arvojoukko. S_X, S_Y ja S_K ovat kaikki äärellisiä joukkoja.

   Osoita, että X ja Y ovat ehdollisesti riippumattomia ehdolla K jos ja vain jos
   $$P(X = x \mid Y = y, K = k) = P(X = x \mid K = k) \quad \text{kaikilla } x, y, k.$$

KÄÄNNÄ!

4. Kulhossa on 4 palloa, joista K on valkoista ja loput mustia. Et tiedä K:n arvoa, mutta ennakkokäsityksesi mukaan kaikki viisi vaihtoehtoa $K = k$ (jossa $k = 0, 1, 2, 3$ tai 4) ovat yhtä todennäköisiä. Nostat silmät sidottuna kulhosta yhden pallon kerrallaan siten, että ennen kutakin nostoa kaikki neljä palloa palautetaan kulhoon ja kulhoa ravistetaan perusteellisesti. Kunkin noston jälkeen saat tietää nostamasi pallon värin. Kolmessa ensimmäisessä nostossa saat tulokseksi värit valkoinen, musta ja valkoinen tässä järjestyksessä.

   a) Esitä prioritodennäköisyydet sekä uskottavuusfunktio taulukoimalla ne k:n funktiona.

   b) Laske posteriorijakauma.

5. Leijona viettää yönsä jossakin kolmesta tilasta: se on joko **unelias** ($K = 1$), **kohtalaisen aktiivinen** ($K = 2$) tai **hyvin aktiivinen** ($K = 3$). Leijona syö yön aikana X ihmistä, ja X:n ehdollinen pistetodennäköisyysfunktio on seuraava:

x	0	1	2	3	4
$P(X = x \mid K = 1)$	.90	.08	.02	.00	.00
$P(X = x \mid K = 2)$	.05	.05	.80	.10	.00
$P(X = x \mid K = 3)$	.00	.05	.05	.80	.10

   Aamulla havaitsemme kauhuksemme, että leijona on syönyt yhden ihmisen. Laske Aapelin ja Bertan posteriorijakauma leijonan tilalle (ts. laske todennäköisyydet $P(K = k \mid X = 1)$, a- ja b-kohdan tilanteissa.)

   a) Aapelin käsityksen mukaan kaikki kolme tilaa ovat yhtä todennäköisiä.

   b) Bertta tietää, että leijona söi edellisenä päivänä tukevan aterian. Bertan ennakkokäsitystä leijonan yöllisestä tilasta kuvaa pistetodennäköisyysfunktio $P(K = 1) = 0.8$, $P(K = 2) = 0.15$ ja $P(K = 3) = 0.05$.