

## Johdatus tilastolliseen päättelyyn Harjoitus 3 (4.–8. 4. 2011)

1. Olkoot  $y_1, \dots, y_n$  reaalilukuja ja  $\bar{y} = \sum_{i=1}^n y_i/n$  niiden aritmeettinen keskiarvo. Näytä, että

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 + n\bar{y}^2.$$

(Luentojen sivulla 15 sovelsimme tätä muotoa  $y_i = x_i - \mu$  oleviin lukuihin. Varmista, että ymmärrät asian!)

2. Olkoon  $X_1, \dots, X_n$  riippumaton otos normaalijakaumasta  $N(\mu, 1)$ . Kuinka suuri on otoskoon  $n$  oltava, jos halutaan, että havaintojen  $x_1, \dots, x_n$  perusteella muodostettava 95 %:n luottamusväli  $\mu$ :lle on pituudeltaan (noin) 1.0 eli muotoa  $(\bar{x} - 0.5, \bar{x} + 0.5)$ ? Entä kuinka suureksi  $n$  on valittava, jos halutaan kymmenkertainen tarkkuus eli luottamusvälin pituudeksi vain (noin) 0.1?

[Muista, että jos  $Z \sim N(0, 1)$ , niin  $P(Z > 1.96) \approx 0.025$ .]

3. Halutaan selvittää tietynmerkkisen savukkeen keskimääräinen häkäpitoisuus  $\mu$ . Tätä varten mitattiin 16:sta satunnaisesti valitusta savukeyksilöstä häkäpitoisuudet. Mittaustulokset vaihtelevat savukkeiden luonnollisesta eroista ja mittausrvirheistä johtuen, ja oletamme, että vaihtelua voidaan pitää normaalisti jakautuneena. Pitoisuuksien keskiarvoksi otoksessa saatiin  $\bar{x} = 8.8$  milligrammaa ja keskihajonnaksi  $s = 1.3$  milligrammaa. Mikä on  $\mu$ :n suurimman uskottavuuden estimaatti ja mikä on sen 95 %:n luottamusväli? Miten luottamusväli muuttuisi, jos otoskoko olisikin ollut 16:n sijasta 61?

4. Oletetaan, että vastasyntyneen poikalapsen päänympäryys noudattaa likimain normaalijakaumaa. Eräessä väestössä on otantatutkimuksen perusteella johdettu keskimääräiselle päänympäryykselle  $\mu$  (senttimetriä) 95 %:n luottamusväli  $(34.3, 34.9)$ . Mitkä seuraavista tulkinnoista ovat oikein ja mitkä väärin?

- $\mu$ :n todennäköisyysjakaumasta 95 % sijaitsee kyseisellä välillä.
- 95 %:lla kaikista vastasyntyneistä poikalapsista päänympäryys on kyseisellä välillä.
- Mikäli samanlainen otantatutkimus toistettaisiin useita kertoja ja joka kerralla muodostettaisiin vastaava luottamusväli, kuuluisi  $\mu$ :n arvo noin 95 %:iin saaduista väleistä.

Perustele erityisesti väriä väitteiden kohdalla, miksi ne ovat väärin.

5. Erään köyden keskimääräinen murtolujuus on ollut 1800 kg. Tehdas muuttaa valmistusmenetelmää ja uskoo murtolujuuden kasvaneen tämän myötä. Tutkittiin 20 uudella menetelmällä valmistettua köyttä ja saatiin niiden keskimääräiseksi murtolujuudeksi 1830 kg, keskihajonnan ollessa 70 kg. Oletamme, että murtolujuuden vaihtelut ovat normaalisia. Voidaanko havaintojen perusteella päätellä murtolujuuden todella kasvaneen? Testaa asiaa  $t$ -testillä ja merkitsevyytasolla 0.05.

**Kääntöpuolella** on Studentin  $t$ -jakauman taulukko tehtäviä 3 ja 5 varten.

KÄÄNNÄ!

Taulukko 1: Studentin  $t$ -jakauman oikeanpuoleisen hännän kriittisiä pisteitä  $t_\nu(\alpha)$ , joille  $\alpha = P(Y \geq t_\nu(\alpha))$ , kun  $Y \sim t_\nu$ . Tässä  $\nu$  on jakauman vapausasteluku;  $t_\infty$  on standardinormaalijakauma  $N(0, 1)$ .

$\nu \backslash \alpha$	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
$\infty$	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576