

**Johdatus tilastolliseen päättelyyn**  
**Harjoitus 1 (21.–25. 3. 2011)**

1. Diskreetin satunnaismuuttujan  $X$  pistetodennäköisyysfunktio on  $f(x; \theta)$ , jossa paramet-rille  $\theta$  on kaksi vaihtoehtoista arvoa: 1 ja 2. Funktion arvot on taulukoitu alla. (Tavalliseen tapaan sovimme, että  $f(x; \theta) = 0$  kaikilla niillä  $x$ :n arvoilla, joita ei ole mainittu.)

$x$	1	2	3	4	5
$f(x; 1)$	0	0.3	0.5	0.1	0.1
$f(x; 2)$	0.1	0.4	0.3	0.2	0

Tarkista, että kummallakin  $\theta$ :n arvolla  $f(x; \theta)$  täyttää pistetodennäköisyysfunktioilta vaa-dittavat ominaisuudet. Esitä kumpikin funktio graafisesti.

2. (Jatkoa edelliseen tehtävään.) Emme tiedä, kumpi  $\theta$ :n arvoista on se ”oikea”, jota sattuma käyttää arpoessaan  $X$ :n arvon. Siksi suoritamme kyseisen satunnaiskokeen ja yritämme päätellä  $\theta$ :n arvon sen tuloksesta.

Oletetaan, että havaittiin  $X = 1$ . Mitä päättelisit  $\theta$ :n arvosta ja voitko olla siitä varma? Miten arvioisit tilannetta, jos havainto olisikin ollut  $X = 3$ ?

3. Menet vieraaseen kaupunkiin ja et tiedä, kuinka monta taksia kaupungissa kaikkiaan toi-mii. Tiedät (tai oletat) kuitenkin, että ne on numeroitu juoksevasti luvuin  $1, 2, \dots, \theta$ , jossa  $\theta$  on taksien kokonaismäärä.

a) Kun olet päässyt kaupunkiin, näet ensimmäisenä taksin numero 179. Mitä tämän pe-rusteella voit varmuudella päätellä  $\theta$ :sta?

b) Ensimmäisen päivän kuluessa olet nähnyt taksit 179, 23, 199, 5, 178, 37, 78, 96, 190 ja 12. Mitä nyt voit varmuudella päätellä  $\theta$ :sta?

c) Koko vierailusi aikana näet 180 taksia ja suurin näkemäsi numero on 202. Mitä nyt voit varmuudella päätellä  $\theta$ :sta?

d) Pohdittavaksi: Olet kuullut väitteen, jonka mukaan  $\theta \geq 250$ . Miten suhtautumise-si tämän väitteen uskottavuuteen kehittyä vierailun kestäessä (a–c-tilanteiden myötä)? Osaatko kuvailla miksi?

Oletamme tässä, että erinumeroiset taksit liikkuvat kaupungilla toisistaan riippumatto-masti ja yhtä suurilla todennäköisyyksillä.

4. Korissa on 100 palloa: 30 keltaista ja 70 valkoista. Nostetaan umpimähkään ja palauttaen 10 palloa. Saatujen keltaisten lukumäärä on satunnaismuuttuja  $T$ . Mitä (todennäköisyys-laskennasta hyvin tuttua) jakaumaa  $T$  noudattaa? Mitkä ovat sen odotusarvo ja keski-hajonta? Laske vielä todennäköisyys tapahtumalle  $\{|T/10 - 0.3| \leq 0.1\}$  eli  $\{T = 2, 3, 4\}$ .

[Vihje. Tulkitse toistokokeena.]

KÄÄNNÄ!

5. (Jatkoa edelliseen tehtävään.)

a) Nostoja onkin 10:n sijasta 100. Arvioi nyt tapahtuman  $\{|T/100 - 0.3| \leq 0.1\}$  todennäköisyyttä.

b) Arvioi, kuinka suuri pitäisi nostojen lukumäärän  $n$  olla, jotta todennäköisyys tapahtumalle  $\{|T/n - 0.3| \leq 0.1\}$  olisi  $\geq 0.99$ .

[*Ohje.* Palauta mieleen binomijakauman normaaliapproksimaatio ja käytä sitä sekä normaalijakauman taulukoita, jollainen on saatavissa esim. kurssin kotisivulta.]

**Huom.** Ainakin 20 % kaikista harjoitustehtävistä on ratkaistava, jotta kurssin voi suorittaa kurssikokeella. Lisäpisteitä saa tällöin 1, 2, 3 tai 4 sen mukaan, onko ratkaissut vähintään 20, 40, 60 vai 80 % tehtävistä. Pisteiden saaminen edellyttää läsnäoloa harjoitusryhmässä.