Diskreetin Matematiikan Paja

Tehtäviä viikolle 3. (31.3 - 1.4)

Jeremias Berg

Jatketaan relaatioita ja funktioita. Uutena käsitteenä (Kuten luvattua..) formalisoimme joukon koon käsitteen. Äärellisillä joukoilla joukon koko (mahtavuus) vastaa intuitiota, mutta äärettömyyksiä käsitellessä intuitiosta ei pian olekaan hyötyä... Aloitetaan myös induktiotodistukset, erittäin tärkeä todistustekniikka joka tulee vastaan useassa kurssissa. Ensi viikolla enemmän induktiota. (Ei siis kannata panikoida vaikkei heti luonnistuisikaan).

1. Määritä seuraavien kuvauksien käänteiskuvaukset:
   (a) $f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\} \quad f(1) = a, f(2) = b, f(3) = c$
   (b) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(n) = \begin{cases} n+7 & 0 \leq n < 7 \\ n-7 & 7 \leq n < 14 \\ n & n \geq 14 \end{cases}$
   (c) $f : [-2, \infty) \to [1, \infty), f(x) = x^2 + 4x + 5$
2. Muodosta yhdistetyt kuvaukset $f \circ g$ ja $g \circ f$ kun $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$ ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{x^2+1}$
3. Olkoot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3$ ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x - 1$. Osoita:
   (a) f on bijektio.
   (b) g on bijektio
   (c) $f \circ g$ on bijektio
4. Olkoot A, B ja C joukkoja ja $f : A \to B$, $g : B \to C$ bijektioita. Osoita että $g \circ f : A \to C$ on bijektio. (Muista että bijektiivisyyden osoittamiseksi riittää löytää käänteiskuvaus)
5. Olkoot $A = \{4, 5, 6\}$ ja $B = \{6, 5, 4, 3\}$. Määritellään vielä:

   $$f : A \to B, f = \{(4, 5), (5, 6), (6, 4)\} \quad g : A \to B, g = \{(5, 4), (6, 5), (4, 6)\}$$

   Onko g f:än käänteiskuvaus? (Katso tarkasti...). Muodosta, jos mahdollista $f \circ g$
6. Mitkä alkiot kuuluvat joukkoon:
   (a) [4]
   (b) [5]
   (c) [13]

7. Olkoot $A = \{Lasse, Madde, Peter, Heidi\}$ ja $B = \{Ruusu, Tulppaani, Auringonkukka, Kielo\}$ Osoita että joukoissa on sama määrä alkioita "laskematta" alkioita. (Mikä olikaan mahtavuuden määritelmä?)

8. Osoita määritelmän nojalla että joukoissa $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ja $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ on yhtä monta alkiota.

9. Olkoon A ja B joukkoja ja $h : A \to B$ bijektio. Oletetaan vielä että A on äärellinen. Osoita että silloin B on äärellinen ja $|A| = |B|$

10. Olkoon A kaikkien parillisten luonnollisten lukujen joukko ja B parittomien. Osoita että $f : A \to B, f(x) = x + 1$ on bijektio.

11. Olkoot A kuten yllä. Osoita että $g : \mathbb{N} \to A, g(x) = 2x$ on myös bijektio. Onko siis luonnollisia lukuja vai parillisia luonnollisia lukuja "enemmän?"

12. Seuraavassa muutama ajatus ohjaamaan Hotelli kosmos tehtävien ratkaisua. Näihin ei tarvitse kirjoittaa ratkaisuja, mutta ne auttavat kosmos tarinan kanssa:

    (a) Mitä vikaa on kuvauksessa $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(n) = \infty + n$ (onko $f(n)$ yksikäsitteinen kaikille n).

    (b) Luonnollisten lukujen mahtavuutta merkitään $\aleph_0$:lla. Osoita määritelmän avulla että $|\mathbb{N} \cup \{-1\}| = \aleph_0$

13. Seuraava katkelma on mukaelma Stanislaw Leminin novellista The Interstellar Milkman, Ion the Quiet, joka on ilmestynyt N.Ya. Vilenkinin kirjassa "Stories About Sets"(Academic Press, 1968).

    Hotelli Kosmos sijaitsee jossakin tähtisumun ACD-1587 tienoilla. Tässä hotellissa on numeroituvasti ääretön määrä huoneita. Ion the Quiet saapuu fotoniraketillaan Kosmoksen pihalle aikoen yöpyä hotellissa. Valitettavati hotelli on täynnä, sillä parhaillaan on menossa universaalieläintieteilijä kongressi. Sen osaanottajat, joita on numeroituvasti ääretön määrä, ovat vallanneet hotellin. Miten hotellin neuvokas johtaja järjestää?
    Vihje: Näissä kaikissa tehtävissä on oikeastaan tarkoitus osoittaa että joukot $A = \{\text{hotellin huoneet}\}$ ja $B = \{\text{ihmiset joiden pitäisi mahtua huoneisiin}\}$ ovat koko ajan yhtä "suuria" sopivien funktioiden avulla.

14. Hieman myöhemmin hotellin ovelle kolkutetaan taas. Nyt ulkona on naapurihotelli Galaksin kaikki (numeroituvasti) äärettömän monta asukasta. Galaksissa syttyi tulipalo ja kaikki sen asukkaat jouduttiin evakuoimaan. Auta taas hotellin johtajaa asukkaiden majoittamisessa.

15. *Aamulla vaikeudet jatkuvat. Jokaisessa linnunratajärjestelmässä?, joita on kaikkiaan numeroituvasti ääretön määrä, on Kosmoksen kaltainen hotelli ja ne kaikki päätetään sulkea. Kaikki asukkaat kuljetetaan Kosmoksen pihalle. Miten hotellin johtaja saa majoitettua kaikki uudet asukkaat Kosmokseen?

16. Kertomus Hotelli Kosmoksesta jatkuu: Hotelliyhtymän johdolta tuli määräys laatia luettelo kaikista mahdollisista tavoista, joilla hotelliin voidaan sijoittaa vieraita. Täyttä huonetta tarkoittaa numero 1 ja tyhjää? 0. Esimerkiksi 101010 . . . tarkoittaa, että paritonnumeroiset huoneet ovat varattuja ja parillisnumeroiset vapaita. Muutaman päivän ahkeran työn jälkeen hotellin johtaja tuli Ion the Quietin luo mukanaan pitkä lista (numeroituvasti, äärettömän pitkä). Ion väitti, että listalla ei voi olla kaikkia mahdollisia tapoja vieraiden sijoittamiseksi. Miten hän perusteli väitteensä? *Tähän auttaa vastaoletus. Oleta että listassa oli kaikki mahdolliset tavat ja yritä muodostaa uusi tapa joka ei ollut listassa*

17. Osoita että
$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$$

Huom Seuraavissa tehtävissä tarvitaan muutamaa määritelmää, tässä X on joukko ja R sen relaatio. Relaatio R on:

(a) Reflexiivinen jos $\forall x \in X\ (x,x) \in R$ (Kaikki joukon alkiot ovat relaatiossa itsensä kanssa).

(b) Symmetrinen jos $\forall x, y \in X\ (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$ (Jokaisesta alkiosta joka on relaatiossa jonkun toisen kanssa “pääsee myös takaisin”, ajattele nuolikaavioita.)

(c) Transitiivinen jos $\forall x, y, z \in X\ ((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$ (Taas voisi ajatella että jos kahden alkion välillä on 2 mittainen ”polku”niin niiden välillä on myös 1 mittainen).

18. Ovatko seuraavat relaatiot R reflexiivisiä, symmetrisiä tai transitiivisia perusjoukossa X kun?

(a) $X = \mathbb{Z}$ ja $R = \{(1,1),(2,2),(3,4),(4,3)\}$

(b) $X = \mathbb{Z}$ ja $R = \{(1,2),(2,3),(3,2),(2,1),(1,3),(3,1),(4,4)\}$

(c) $X = \mathbb{R}$ ja $R =<$ (eli $xRy \Leftrightarrow x < y$)

(d) $X = \mathbb{Z}$ ja $R =\leq$

19. Olkoot $X = \{1,2,3,4\}$ muodosta relaatio $R \subset X \times X$ joka on:

(a) ei-reflexiivinen, symmetrinen, transitiivinen.

(b) reflexiivinen, ei-symmetrinen, transitiivinen

(c) reflexiivinen, symmetrinen, ei-transitiivinen

(d) reflexiivinen symmetrinen transitiivinen

Olkoot X joukko ja R_1, R_2 sen relaatioita. Määritellään

$$R_1 \circ R_2 = \{(x,y) \in X \times X : \exists z((z,y) \in R_2 \wedge (x,z) \in R_1)\}$$

20. Olkoon $A = \{1, 2, 3\}$ ja $R_1 = \{(1, 2), (2, 3)\}$ Muodosta sellainen relaatio R_2 A:lle että $(1, 3) \in R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$

21. Osoita induktiolla että

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

22. Osoita induktiolla että:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

23. Osoita induktiolla että $n * m = k$ suklaalevyn pilkkomiseen osiksi "normaalilla" tavalla tarvitaan $k - 1$ "katkaisua" riippumatta pilkkomistaktiikasta. (Muista että induktiosta on 2 eri periaatetta)

24. Muodostetaan pyramidi seuraavasti:

    (a) Ensimmäiselle kerrokselle tulee 1 kivi.

    (b) Toiselle 3 siten että kivien keskimmäinen on ensimmäisen kerroksen kiven alla.

    (c) Kolmannelle 5 siten että kolmas kivi on linjassa ensimmäisen kerroksen kiven alla.

    (d) Näin jatketaan.

    Osoita että n kerroksisessa pyramiidissä on yhteensä n^2 kiveä.

25. *Formalisoidan nyt viime viikon tehtävä. Osoita määritelmien avulla että jos $|A| = m$, $|B| = n$ niin $|B \times A| = |A \times B| = n \cdot m$ (Ohje, kannattaa katsoa kuinka esim unioiden vastaava tulos todistetaan sivulla 31. Muista että oletukset antavat muutamankin funktion olemassaolon).

26. *Osoita että $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$. Kannattaa käyttää hyväksi lausetta (jota ei tällä kurssilla todisteta) joka menee seuraavasti: **Olkoot A ja B joukkoja ja $f : A \to B$, $g : B \to A$ injektioita. Tällöin on olemassa $h : A \to B$ bijektio**. Muista ettei tehtävässä siis tarvitse eksplisiittisesti määrittää bijektiota. Vain osoittaa että sellainen on olemassa.

27. *Osoita nyt että $|\mathbb{R}| \neq |\mathbb{N}|$ (Itse asiassa $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$ mutta tätä ei tarvitse osoittaa). Tavataan sanoa että reaaliluvut ovat ylinumeroituvasti äärettömiä. Bonus: Osaatko arvoida onko olemassa joukkoa X jolle pätisi $|\mathbb{N}| < |X| < |\mathbb{R}|$