Diskreetin Matematiikan Paja
Tehtäviä viikolle 4. (7.4 - 8.4)
Jeremias Berg

Induktiota. Induktio on tärkeä todistustekniikka joka tulee vastaan monilla kurssseilla vielä. Alkupään tehtävät ovat enemmän sitä mekaanista: ”tehkää näin”kategoriaa kun loppupuolella aletaan miettiä myös että miksi homma toimii niin kuin se tekee.

1. Varmaan kaikkein klassisin esimerkki induktiosta: Osoita induktiolla että:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. Osoita induktiolla että

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. Laske:
   (a) $\sum_{k=1}^{100} k^2$
   (b) $\sum_{k=15}^{1000} k^2$

4. Osoita induktiolla että:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

5. Osoita induktiolla että k:n ruudun kokoisen suklaalevyn pilkkomiseen osiksi “normaalilla” tavalla (viivoja pitkin) tarvitaan $k-1$ “katkaisua” riippumatta pilkkomistaktiikasta. (Muista että induktiosta on 2 eri periaatetta)

6. Muodostetaan pyramidi seuraavasti:
   (a) Ensimmäiselle kerrokselle tulee 1 kivi.
   (b) Toiselle 3 siten että kivien keskimmäinen on ensimmäisen kerroksen kiven alla.
   (c) Kolmannelle 5 siten että kolmas kivi on linjassa ensimmäisen kerroksen kiven alla.
   (d) Näin jatketaan...

   Osoita että n kerroksisessa pyramiidissä on yhteensä n^2 kiveä.

7. Vaikka induktio onkin ihan kätevä työkalu siinä on vähän samaa “vikaa” kuin vastaväite todistuksissa. Sillä saa varmuuden siihen että väite pätee, vaan ei useimmiten kovinkaan paljon tietoa siitä miksi. Yritetään todistaa tehtävän 1 havaintoa konstruktiivisesti. Eli todista tehtävä 1 uudestaan ilman induktiota. Apuna kannattaa käyttää seuraavaa: Jos $S_4 = 1 + 2 + 3 + 4$ niin voimme kirjoittaa:

$$\begin{aligned} S_4 &= 1 + 2 + 3 + 4 \\ S_4 &= 4 + 3 + 2 + 1 \\ 2S_4 &= (1 + 4) + (2 + 3) + (3 + 2) + (4 + 1) = (4 + 1) + (4 + 1) + (4 + 1) + (4 + 1) = 4 \cdot (4 + 1) \end{aligned}$$

8. Todista näistä väitteistä se joka pitävät paikkansa.

   (a) $\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2$

   (b) $\sum_{k=0}^{n} 2k - 1 = n^2$

   (c) $\sum_{k=0}^{n} (2k - 1) = n^2 + 1$

9. Osoita induktiolla että kaikille luonnollisille luvuille pätee:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$$

10. Osoita induktiolla että

$$2^n \leq n!$$

    kaikille $n > 4$

11. Mitä vikaa on seuraavassa “induktio todistuksessa” jossa osoitetaan että kaikki hevoset ovat saman värisiä:

    Osoitetaan että kaikki hevoset ovat saman värisiä. Tämä vastaa sitä että joukossa jossa on $\forall n \;\; n$ määrä hevosia kaikki ovat saman värisiä.

    1) Perusaskel: Joukossa jossa on 1 hevonen kaikki ovat triviaalisti saman värisiä.

    2) Induktioaskel oletetaan että kaikissa joukoissa jossa on n hevosta kaikki ovat saman värisiä. Tutkitaan nyt mielivaltaista joukkoa jossa on $n+1$ hevosta. Tutkitaan kahta tiettyä hevosta joukosta. Kutsutaan näitä hevosiksi x ja y. Poistetaan ensiksi hevonen x, nyt jäljelle jää joukko jossa on n hevosta. Induktio oletuksen mukaan näillä on sama väri. Sanotaan väriä vaikka väri a. Erikoisesti hevonen y on a:n värinen. Nyt laitetaan hevonen x takaisin ja poistetaan y. Nyt jäljellä on taas n jäseninen hevosjoukko. Taas induktio oletuksen mukaan ne ovat kaikki saman värisiä. Koska joukon muut hevoset ovat edelleen a:n värisiä niin hevonen x:kin on a:n värinen. Eli x ja y ovat saman

värisiä. Koska samaa argumentointia voidaan käyttää kaikille hevospareille $n + 1$ jäsenisestä joukostamme voimme siis todeta että $n+1$ jäsenisessä hevosjoukosamme kaikki ovat saman värisiä. Tämä osoittaa induktioaskeleen ja näin olemme osoittaneet että kaikki hevoset ovat saman värisiä.

12. Fibonaccin luvut on määrritelty rekursiivisesti seuraavan kaavan mukaan: $\forall x \in \mathbb{N}, f(1) = f(2) = 1$ ja
$$f(n) = f(n-2) + f(n-1)$$
. Osoita että kaikille fibonaccin luvuille $f(n)$ pätee
$$f(n) < 2^n$$

13. Osoita induktiolla että kaikille fibonacci luvuille $f(n)$ $f(3n)$ on parillinen. (Miten parillinen luku voidaan kirjoittaa...)

14. Osoita että kaikille luonnollisille luvuille n ja reaaliluvuille x pätee: $(1+x)^n \geq 1+xn$ (huomaa että tässä x on vakio).

15. *Induktiota voi myös käyttää muunlaisiin todistuksiin: Todista että kaikille $a \in R$ ja $m, n \in N$ pätee:
    (a) $a^{m+n} = a^m a^n$
    (b) $a^{m-n} = \dfrac{a^m}{a^n}$
    (c) $(a^m)^n = a^{mn}$

    Vihje: Anna m olla mielivaltainen ja "indusoi" n:ää. Käytä seuraava exponentiaalifunktion määritelmää: $a^1 = a$, $a^{m+1} = a^m \cdot a$

16. *Osoita seuraavaksi induktiolla derivoinnin tulosääntö. Eli jos $f_1, f_2, f_3 ... f_n$ ovat kaikki derivoituvia funktioita $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ niin
$$(f_1 f_2 .... f_n)' = f_1' f_2 f_3 .... f_n + f_1 f_2' f_3 .... f_n + f_1 f_2 f_3' .... f_n + f_1 f_2 f_3 .... f_n'$$
(Huom! Tässä ei tarvitse liikaa huolehtia siitä mitä tarkalleen ottaen on dervointi etc. Kahden funktion tulon derivaatan saa olettaa tunnetuksi.)

17. *Osoita induktion avulla luonnollisten lukujen hyvinjärjestysperiaate. Jokaisessa epätyhjässä luonnollisten lukujen osajoukossa on pienin alkio.