Diskreetin Matematiikan Paja

Tehtäviä viikolle 6. (28.4 - 29.4)

Jeremias Berg

Viimeistä viedään, jäljellä enää verkot. Matematiikassa verkkoteorian sanotaan saaneen alkunsa Leonhard Eulerista ja Königsbergin siltaongelmasta. Tämä ongelma on mukana kysymysten joukossa.

Huom! Usein verkkoja käsiteltäessä merkitään solmujen joukkoa V:llä (vertices) ja kaarien joukkoa E:llä (edges). Tässä pysytellään kuitenkin materiaalin käyttämässä (ehkä hieman heikossa) X tai P pisteille ja V kaarille.

1. Piirrä seuraavat verkot ja merkitse jokaisen solmun kohdalle sen aste:

   (a) $G = (\{a, b, c\}, \{\{a, b\}, \{b, c\}\})$

   (b) $G = (\{b, d, m, k\}, \{\{b, d\}, \{d, m\}, \{m, k\}, \{k, b\}, \{b, m\}\})$

   (c) $G = (\{a, b, c, d, e, f\}, \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{e, f\}, \{a, f\}, \{a, c\}, \{c, e\}, \{a, e\}, \{b, d\}, \{d, f\}, \{b, f\}\})$

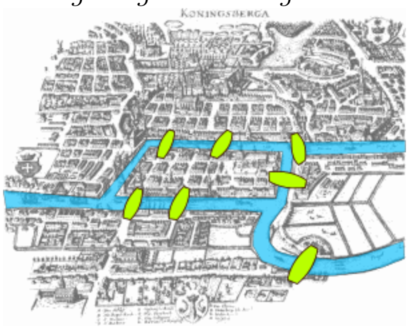
2. Piirrä sellaiset verkot G joille pätee:

   (a) $|V_G| > 4$ ja pisteiden väliset etäisyydet ovat korkeintaan 2

   (b) $|V_G| > 3$ ja jokainen piste on paritonasteinen.

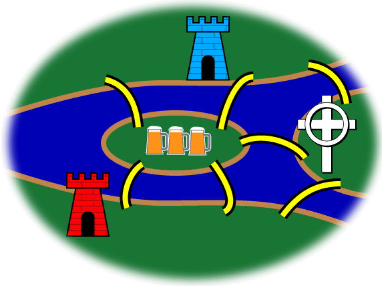
   Mikä on pienin ehdot täyttävä verkko jonka pystyt piirtämään.

3. *Königsbergin siltaongelma.* Katso seuraavaa kuvaa

   Tämä on kartta kahdesta saaresta ja niitä ympäröivistä silloista Köningsbergin (Kalingrad) kaupungissa. Kaupungin asukkailla oli 1700-luvulla tapana yrittää suorittaa sellaista kävelylenkkiä joka ylittäisi jokaisen sillan tasan kerran ja loppuisi samaan paikkaan mistä alkoikin. Leonhard Euler pilasi kuitenkin tämän ilon todistamalla ettei tälläistä kävelyä ole mahdollista suorittaa. Miten hän todisti sen? (*Mikäköhän oli Eulerin kierros?*

4. Jatketaan siltaongelmaa. Kuvitellaan nyt seuraavanlainen tilanne:



Tässä kuvassa siis samanlaiset saaret ja sillat kuten edellisessä tehtävässä. Kuitenkin nyt pohjoisessa asuu sininen kuningas, etelässä hänen veljensä punainen kuningas, keskisaarella on majatalo ja idässä kirkko:

   (a) Sininen kuningas on verkkoteoriaa apunaan käyttäen pystynyt osoittamaan että kaikkia siltoja kerran ylittävää kävelyä ei pysty suorittamaan. Nyt hän haluaakin rakentaa uuden sillan joka mahdollistaisi hänen iltakävelynsä alkavan siniseltä linnalta, ylittävän kaikki sillat kerran ja loppuvan majataloon. Tämän lisäksi vaatimuksena on ettei punainen kuningas pystyisi samaan omalta linnaltaan. Minne sininen kuningas rakentaa sillan?

   (b) Huomattuaan veljensä rakentaman sillan punainen kuningaskin päättää rakentaa uuden sillan. Hänkin haluaa pystyä aloittamaan iltakävelynsä omalta linnaltaan, ylittää kaikki sillat kerran ja lopettaa sen majataloon. Tämän lisäksi hän haluaa rakentaa uuden sillan niin ettei sininen kuningas enää pystykkään samaan omalta linnaltaan. Minne yhdeksäs silta rakennetaan?

   (c) Rauhaa rakastava pappi on seurannut veljesten kisailua ja päättää nyt lopettaa sen hyvän sään aikana. Hän kerää kirkon kolehtirahat ja rakentaa vielä kymmenennen sillan. Papin vaatimuksena on että sillan rakentamisen jälkeen joka puolelta kaupunkia pitäisi pystyä ylittämään kaikki sillat kerran ja palaamaan sen jälkeen aloituskohtaan. Minne viimeinen silta rakennetaan?

5. Tutki missä tehtävän 1 verkoista on Eulerin ja/tai Hamiltonin kierros.

6. Anna määritelmä sille mitä tarkoittaa että kaksi verkkoa ovat isomorfiset toistensa kanssa.

7. Katso "verkot" sivun verkkoa numero 1:

   (a) Anna esimerkki verkosta joka on sen kanssa isomorfinen

   (b) Anna esimerkki verkosta joka ei ole sen kanssa isomorfinen mutta jossa on yhtä monta pistettä ja viivaa.

8. Osoita että verkot $2a$ ja $2b$ ovat isomorfisia.

9. Verkoista $3a$ $3b$ ja $3c$ kaksi ovat isomorfisia. Osoita mitkä kaksi.

10. Ovatko seuraavat verkot $(X_1, V_1), (X_2, V_2)$ toistensa kanssa isomorfisia?

$$\begin{aligned} X_1 &= \{0, 1, 2, 3, 4\} \\ V_1 &= \{\overline{01}, \overline{12}, \overline{23}, \overline{34}, \overline{40}\} \\ X_2 &= \{5, 6, 7, 8, 9\} \\ V_2 &= \{\overline{57}, \overline{58}, \overline{69}, \overline{68}, \overline{79}\} \end{aligned}$$

11. Osoita että jos kaksi verkkoa G_1 ja G_2 ovat isomorfisia niin $|V_{G_1}| = |V_{G_2}|$

12. Olkoon G verkko ja $|V_G| = 21$. Oletetaan vielä että verkossa on 7 1-asteista pistettä 3 2-asteista 7 3-asteista. Loput pisteistä ovat 4 asteisia. Kuinka monta pistettä verkossa on.

13. Onko seuraava verkko kaksijakoinen?

$$X = \{1, 2, 3, 4\} \quad V = \{\overline{12}, \overline{23}, \overline{34}, \overline{41}\}$$

14. Verkon $G = (X, V)$ komplementtiverkko G^{-1} voidaan määritellä seuraavasti:

$$G^{-1} = (X, V') : \{x, y\} \in V' \Leftrightarrow \{x, y\} \notin V$$

Eli verkkoon kuuluvat samat pisteet mutta kahden pisteen välissä on kaari vain jos niiden välillä ei ollut kaarta alkuperäisessä verkossa. Osoita että jos G on epäyhtenäinen niin sen komplemenntiverkko on yhtenäinen.

15. Piirrä sellainen verkko joka on:

    (a) Yhtenäinen mutta poistettaessa yksikin solmu ei pysy enää yhtenäisenä.

    (b) Yhtenäinen ja pysyy yhtenäisenä riippumatta siitä kuinka monta solmua siitä poistetaan.

    Mikä on pienin ehdot täyttävä verkko jonka pystyt piirtämään

16. *Todista Eulerin kierroksen vaatimukset verkoille. Eli että verkossa G on Eulerin kierros $\Leftrightarrow$ se on yhtenäinen ja jokainen piste on parillisasteinen. *Ohje:* Tässä $\Leftrightarrow$ on itse asiassa induktiotodistus kaarten lukumäärän suhteen. Osoita että kaikille $k \in \mathbb{N}$ jos verkossa G on k kaarta, ja se on yhtenäinen sekä parillisasteinen niin siinä on Eulerin kierros.