Diskreetin Matematiikan Paja

Tehtäviä viikolle 5. (14.4 - 15.4)

Jeremias Berg

Lähestytään loppua. Jäljellä kombinatoriikkaa sekä hieman verkkoja. Aikaisempiin teemoihin verrattuna kombinatoriikka edustaa ehkä hieman enemmän lukiosta tuttua "laskemista" ainakin tällä kurssilla, kumminkin muutama identiteetti löytyy joita kiinnostunut lukija voi yrittää todistaa konstruktiivisestikin. Induktio todistukset ovat askelta haastavampia kuin viime viikolla, mutta eivät missään nimessä mahdottomia.

1. Laske ilman laskinta:
   (a) $\binom{3}{2}$
   (b) $\binom{5}{3}$
   (c) $\binom{20}{12}$
   (d) $\binom{7}{3}$
2. "Selitystehtävä" Keksi kertomus, jossa esiintyvät seuraavat kolme laskutoimitusta:
   (a) $\binom{732}{23}$
   (b) $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17$
   (c) $20!$
3. Eräässä kerhossa on 25 jäsentä. Kuinka monella tavalla voidaan valita
   (a) nelihenkinen johtokunta
   (b) puheenjohtaja, varapuheenjohtaja, sihteeri ja rahastonhoitaja
4. Kuinka monta eri "sanaa" voidaan muodostaa sanoista:
   (a) Induktio
   (b) Diskreetti
   (c) Matematiikka
   (d) Abrakadabra
5. Kuinka monta erilaista sanaa voidaan muodostaa sanan "MIMMI" kirjaimista, jos kirjaimia voi myös jättää käyttämättä? Sanoja ovat esimerkiksi "MM", "IIM" ja "MIMI"

6. Kuinka monta eri lopputulosta on mahdollista saada kolmea noppaa heitettäessä kun:
   (a) Nopat ovat saman värisiä?
   (b) Nopat ovar eri värisiä?
7. Kuinka monta eri permutaatiota joukolla $\{A, C, F, M, P, R, T, X\}$ on jos:
   (a) Permutaatiolle ei aseteta rajoituksia
   (b) A:n ja C:n alkioiden välissä täytyy olla 2 tai kolme muuta alkiota.
   (c) A:n ja C:n välissä ei saa olla kahta tai kolmea muuta alkiota.
   (d) Ensimmäiset neljä alkiota valitaan joukosta $\{F, M, C, R, X\}$.
   (e) Alkoiden A, C, F, M täytyy olla vierekkäin.
8. Kuinka monta erilaista pokerikättä voit saada pakasta jossa ei ole jokereita?
9. Todista että kaikille $n \in \mathbb{N}$ $n > 0$ ja $0 \leq k \leq n-1$ pätee:
$$\binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}$$
10. Todista että kaikille $n \in \mathbb{N}$ ja $0 \leq k \leq n$ pätee:
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
11. Kuten monen asian matematiikassa myös edellisen tehtävän voi todistaa monella eri lailla . Esimerkiksi manipuloimalla yhtälöitä tai "kombinatorisella päättelyllä". Todista nyt sama asia sillä tavalla jota äsken et käyttänyt (jos käytit jotain muuta tapaa äsken saat nyt valita itse) . Kombinatorisessa päättelyssä kannattaa ajatella että $\binom{n}{k}$ kertoo kuinka monta k:n alkion kokoista osajoukkoa n alkioisella joukolla on.
12. Jalkapalloturnaukseen osallistuu 10 joukuetta. Kuinka monella eri lailla mitallit voi jakautua kun poislasketaan tasapelien mahdollisuus?
13. Tiedämme että $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Perustele tämä kun ajatellaan että $\binom{n}{k}$ kertoo kuinka monella eri tavalla voidaan n:stä alkiosta valita k kappaletta välittämättä järjestyksestä. Tämäkin on esimerkki kombinatorisesta päättelystä.
14. Luokalta jossa on 12 poikaa ja 17 tyttöä valitaan joukkue johon tulee 2 tyttöä ja 2 poikaa. Kuinka monella tavalla valinta voidaan tehdä?

15. Olkoot $k, l, m \in \mathbb{N}$ ja $n = k + l + m$. Osoita että on voimassa:

$$\binom{n}{k\ l\ m} = \binom{n-1}{(k-1)\ l\ m} + \binom{n-1}{k\ (l-1)\ m} + \binom{n-1}{k\ l\ (m-1)}$$

Termiä $\binom{n}{k\,l\,m}$ kutsutaan *multinomikertoimeksi*. Samalla lailla kuin binomikertoin $\binom{n}{k}$ kertoo kuinka monella tavalla voidaan n:stä alkiosta valita k niin multionomikerroin: $\binom{n}{k\,l\,m}$ kertooo kuinka monella eri tavalla n alkioisesta joukosta voidaan valita 3 joukkoa siten että yhteen tulee k toiseen l ja kolmanteen m alkiota. Tätä käytettiin itse asiassa jo tehtävässä 4. Määritelmä löytyy sivulta 58

16. Todista binomilause. Eli että kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $x, y \in \mathbb{R}$ on voimassa että:

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

Mitäköhän viime viikolla harjoiteltiin? Tämä vaatii summamerkin kanssa kikkailua.

17. Osoita että kaikille $n \in \mathbb{N}$

$$\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$$

ja

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$$

18. Osoita että kaikille $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

(a) Vapaa valintaisella tavalla

(b) *Induktiolla (eli induktio todistuksesta saa suoraan 2 rastia)

Mitä siis on $|\mathcal{P}(A)|$ on jos $|A| = n$

19. Laske auki $(x+3)^7$

20. Mikä on termin $x^{10}y^7$ kerroin $(x^2+3y)^{12}$ kehityksessä.

21. Todista vielä että kaikille $p \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{N}$ pätee:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1$$

22. Piirrä sellainen verkko joka on:

(a) Yhtenäinen mutta poistettaessa yksikin solmu ei pysy enää yhtenäisenä.
(b) Yhtenäinen ja pysyy yhtenäisenä riippumatta siitä kuinka monta solmua siitä poistetaan.