Diskreetin Matematiikan Paja
Ratkaisuja viikolle 4. (7.4 - 8.4)
Jeremias Berg

1. Osoita induktiolla että
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ratkaisu: Kuten kaikissa induktiotodistuksissa meidän täytyy siis osoittaa 2 asiaa. Ns. perustapaus, eli että väite pätee alkuarvolla, joka tässä tapauksessa on $n = 1$. Ja että jos väite pätee arvolla $n = n'$ niin se pätee myös arvolla $n = n' + 1$. Nämä seikat kun ymmärtää niin osaa periaatteessa tehdä kaikki, ainakin hieman yksinkertaisemmat induktiotodistukset.

(a) Osoitetaan ensin että väite pätee arvolla $n = 1$. Tämä tehdään tutkimalla annetun yhtälön molempia puolia erikseen:
$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{1} k = 1 \\ \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$
Koska molemmat puolet olivat samat niin todistettava väite siis pätee arvolla $n = 1$.

(b) Nyt sitten toinen osa. Nyt oletetaan että väite pätee jollekin mielivaltaiselle $n = n'$. Toisin sanoen oletetaan että
$$\sum_{k=1}^{n'} k = \frac{n'(n'+1)}{2}$$
Nyt pitäisi osoittaa että se pätee myös arvolle $n' + 1$. Lasketaan:
$$\sum_{k=1}^{n'+1} k = \sum_{k=1}^{n'} k + (n'+1)$$
Nyt voimme käyttää oletustamme ja jatkaa:
$$\sum_{k=1}^{n'} k + (n'+1) = \frac{n'(n'+1)}{2} + (n'+1) = \frac{n'(n'+1) + 2(n'+1)}{2} = \frac{(n'+1)(n'+2)}{2}$$
Saatiin siis:
$$\sum_{k=1}^{n'+1} k = \frac{(n'+1)(n'+2)}{2} = \frac{(n'+1)((n'+1)+1)}{2}$$

Joka oli täsmälleen sitä mitä piti osoittaa. Nyt olemme siis a kohdassa osoittaneet että väite pätee arvolle 1 ja b kohdassa että jos se pätee jollekin arvole niin se pätee myös seuraavalle, eli voimme soveltaa b. kohdaa aina uudestaan, ensin todetaksemme että se pätee arvolle 2, sitten arvolle 3 etc.

2. Osoita induktiolla että:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ratkaisu: Tekniikaltaan täysin samanlainen tehtävä. Voimme aloittaa kirjoittammalla sen summamerkillä, pitää siis osoittaa että:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Sovelletaan samaa tyyliä kuin äsken:

(a) Perustapaus: Jos $n = 1$ niin:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1 \\ \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1 \end{cases}$$

Eli väite pätee arvolla $n = 1$.

(b) Nyt oletetaan taas että väite pätee mv. $n = n'$. Eli oletetaan (nämä kannattaa yleensä kirjoittaa itselleen näkyviin):

$$\sum_{k=1}^{n'} k^2 = \frac{n'(n'+1)(2n'+1)}{6}$$

Nyt pitäisi taas osoittaa että se pätee arvolle $n' + 1$. Lasketaan (huomaa että viimeinen termi on korotettuna toiseen potenssiin, huomaa myös missä kohtaa käytetään oletusta):

$$\sum_{k=1}^{n'+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n'} k^2 + (n'+1)^2 =$$

$$\frac{n'(n'+1)(2n'+1)}{6} + (n'+1)^2 = \frac{n'(n'+1)(2n'+1) + 6(n'+1)^2}{6} =$$

$$\frac{(n'+1)(n'(2n'+1) + 6(n'+1))}{6} = \frac{(n'+1)(2(n')^2 + n' + 6n' + 6)}{6} =$$

$$\frac{(n'+1)(2(n')^2 + 7n' + 6)}{6} = \frac{(n'+1)(2(n') + 3)(n'+2)}{6} =$$

$$\frac{(n'+1)((n'+1)+1)(2(n'+1)+1)}{6}$$

Taas saatiin siis että jos:

$$\sum_{k=1}^{n'} k^2 = \frac{n'(n'+1)(2n'+1)}{6}$$

Niin silloin:

$$\sum_{k=1}^{n'+1} k^2 = \frac{(n'+1)((n'+1)+1)(2(n'+1)+1)}{6}$$

Tämä kun yhdistetään a) kohtaan niin induktiotodistus on siis valmis ja väite pätee kaikille $n \in \mathbb{N}$. Huomaa tehtävien samankaltaisuudet, molemmissa lähdettiin pyörittelemään $n'+1$ lauseketta siten että ensin saatiin se sellaiseen muotoon että voitiin käyttää oletusta ja sitten saatiin se väittämän vaatimaan muotoon.

3. Laske:

   (a) $\sum_{k=1}^{100} k^2$

   (b) $\sum_{k=15}^{1000} k^2$

   Ratkaisu: Tehtävän idea oli lähinnä totuttaa summamerkkiin, edellisessä tehtävässä osoitettiin kiva kaava neliöiden summalle jota tässä voidaan käyttää:

   (a) $\sum_{k=1}^{100} k^2 = \frac{100(100+1)(2(100)+1)}{6} = 338350$

   (b)

$$\sum_{k=15}^{1000} k^2 = \sum_{k=1}^{1000} k^2 - \sum_{k=1}^{15} k^2 = \frac{1000(1000+1)(2(1000)+1)}{6} - \frac{15(15+1)(2(15)+1)}{6} = 333832260$$

4. Osoita induktiolla että:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

   Ratkaisu: Taas induktiotodistus. Seurataan tuttua kaavaa:

   (a) Perustapaus: $n = 1$ jolloin:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

   Eli väite pitää paikkansa arvolla $n = 1$.

(b) Nyt oletetaan taas että väite pätee jollekin $n = n'$. Ts. oletetaan että:

$$\sum_{k=1}^{n'} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n'}{n'+1}$$

Nyt aletaan taas pyöritellä $n'+1$ lauseketta:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n'+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n'} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n'+1)(n'+2)} &= \\
\frac{n'}{n'+1} + \frac{1}{(n'+1)(n'+2)} = \frac{n'(n'+2)+1}{(n'+1)(n'+2)} &= \\
\frac{n'^2+2n'+1}{(n'+1)(n'+2)} = \frac{(n'+1)^2}{(n'+1)(n'+2)} &= \\
\frac{n'+1}{n'+2} = \frac{n'+1}{(n'+1)+1}
\end{aligned}$$

Taas onnistuttiin osoittamaan että jos väite pätee arvolle n' niin se pätee myös arvolle $n'+1$. Yhdistettynä a) kohtaan induktiotodistus on siis valmis ja voidaan vetää johtopäätös että väite pätee kaikille n.

5. Osoita induktiolla että k:n ruudun kokoisen suklaalevyn pilkkomiseen osiksi "normaalilla" tavalla (viivoja pitkin) tarvitaan $k-1$ "katkaisua" riippumatta pilkkomistaktiikasta. (Muista että induktiosta on 2 eri periaatetta)

   Ratkaisu: Hieman erilainen tehtävä jonka tarkoituksena oli osoittaa että induktiolla voi tehdä muutakin kun todistella summakaavoja. Samalla tutustutaan induktion toiseen periaatteeseen. Tässä tehtävässä ei tarvitse murehtia kovinkaan paljon "matemaattisista" merkinnöistä. Riittää kun tajuaa idean, jos ei pysy mukana niin kannattaa piirtää kuva:

   (a) Perustapaus: jos suklaalevyssä on $k = 1$ palaa niin sitä ei tarvitse katkaista kertaakaan, eli tarvittavat katkaisut ovat $0 = 1 - 1$ ja väite pätee.

   (b) Induktio oletus, nyt tehdään vahvempi induktioletus, eli oletetaan että kaikille suklaalevyille jossa on n' tai vähemmän paloja väite pätee. (Ts. oletetaan väitteen paikkansapitävyys kun $k \leq n'$. Nyt jos tarkastellaan levyä jossa on $n'+1$ palaa niin voimme katkaista sen kerran ja tuottaa 2 levyä joissa on jokin määrä ruutuja, sanotaan vaikka että yhdessä on a ruutua ja toisessa b. Nyt tiedämme siis että $a + b = n' + 1$. Tämän lisäksi $a \leq n'$ ja $b \leq n'$ Eli tiedämme oletuksesta että näiden levyjen pilkkomiseen tarvitaan $a - 1$ ja $b - 1$ katkaisua. Eli yhteensä $n + 1$ ruudun kokoisen suklaalevyn pilkkomiseen tarvitaan $1 + (a - 1) + (b - 1)$ katkaisua. Kuitenkin pätee:

$$1 + (a-1) + (b-1) = a + b - 1 = n' + 1 - 1 = n'$$

koska $a + b = n' + 1$. Olemme nyt osoittaneet että oletuksella: "n' ruudun kokoisen sulkaalevyn pilkkomiseen tarvitaan $n' - 1$ katkaisua" voimme johtaa tuloksen että $n'+1$ ruudun kokoisen levyn pilkkomiseeen tarvitaan $n'+1-1 = n'$ katkaisua. Induktiotodistus on täten valmis.

6. Osoita että n kerroksisessa pyramidissa on n^2 kiveä.

   Ratkaisu: Tässä oli hankaluutena lisättävien kivien määrä. Kirjoitetaan ensin taulukko jossa vasemmalla on kerros ja oikealla juuri siinä kerroksessa olevien kivien määrä. (Huomaa siis että kyseessä on sen kerroksen kivien määrä, ei koko pyramiidin kivien määrä):

Kerros	Kivien määrä
1	1
2	3
3	5
4	7
5	9

   Tästä voisi vetää johtopäätöksen että kerroksessa n tulee olemaan $2n - 1$ kiveä. Tämän todistamista ei tehtävässä vaadittu, mutta sen huomaaminen on olellista tehtävän ratkaisun kannalta:

   Nyt voimme siis siirtyä taas vanhaan tuttuun induktiotodistukseen, taas kaksi asiaa osoitettavana:

   (a) Perustapaus: jos kerroksia on 1 ($n = 1$) niin kiviä on selvästi $1 = 1^2$. Eli väite pätee.

   (b) Nyt oletetaan taas että väite pätee arvolle $n = n'$, eli jos pyramidissa on n' kerrosta niin kiviä on n'^2. Nyt tiedämme aikaisemmasta että jos n' kerroksiseen pyramidiin lisätään kerros niin kiviä tulee lisää $2(n'+1)-1$. Eli $n'+1$ kerroksisen pyramidin kivimäärä on sama kuin n' kerroksisen plus $2(n'+1)-1$. Eli oletuksen avulla $n' + 1$ kerroksisessa pyramidissä on siis kiviä yhteensä:

   $$n'^2 + 2(n' + 1) - 1 = n'^2 + 2n' + 2 - 1 = n'^2 + 2n' + 1 = (n' + 1)^2$$

   Joka siis osoittaa väitteen ja viimeistelee induktiotodistuksen.

7. Osoita ensimmäinen tehtävä ilman induktiota.

   Ratkaisu: Tässä ideana oli tosiaankin hieman näyttää induktiotodistuksen hyötyjä ja "haittoja". Induktiotodistus on usein hieman helpompi kuin jokin muu tapa, mutta usein myös vähemmän informatiivinen. Osoitetaan nyt ensimmäinen tehtävä ilman induktiota, tästä saa toivottavasti paremman kuvan siitä miksi kaava pätee.

   Merkitään

   $$S_n = \sum_{k=1}^{n} k$$

Nyt voimme seurata vihjettä ja kirjoittaa:

$$\begin{cases} S_n = 1 + 2 + 3 + ... + (n-2) + (n-1) + n \\ S_n = n + (n-1) + (n-2) + .. + 3 + 2 + 1 \end{cases}$$

Voimme laskea nämä kaksi yhtälöä yhteen ja saada:

$$2S_n = (n+1) + ((n-1)+2) + ((n-2)+3) + ... + (3+(n-2)) + (2+(n-1)) + (1+n)$$

Nyt kun vielä huomataan että jokainen termi on yhtä kuin $n+1$ ja että termejä on yhteensä n kappaletta saadaan siis

$$2S_n = \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + ... + (n+1) + (n+1) + (n+1)}_{\text{n:kpl}}$$

$$2S_n = n(n+1) \Leftrightarrow S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Joka osoittaa sen mitä pitikin.

8. Todista väitteistä ne jotka pitävät paikkansa:

   (a) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$

   (b) $\sum_{k=1}^{n} 2k - 1 = n^2$

   (c) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2 + 1$

   Ratkaisu: b) ja c) kohdassa riittää kokeilla arvolla $n = 0$ jolloin huomataan että kaava ei päde (yksi vastaesimerkki tai yleinen todistus). a) kohta taas pätee, mutta todistus on oleellisesti sama kuin pyramiidi tehtävä esitettynä “kaavamaisemmin”.

9. Osoita induktiolla että kaikille luonnollisille luvuille pätee:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

   Ratkaisu: Sitten aletaan harjoitella kertomamerkin käyttöä. Muistin virkistykseksi: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$. Todistetaan väite jo tutulla induktiotekniikalla:

   (a) Perusaskel: kun $n = 1$ niin:

$$\begin{cases} 1 \cdot 1! = 1 \cdot 1 = 1 \\ (1+1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1 \end{cases}$$

   Eli väite pätee.

(b) Nyt oletetaan että väite pätee jollekin $n = n'$ Eli oletetaan että

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + n' \cdot n'! = (n' + 1)! - 1$$

Tutkitaan nyt $n' + 1$:sen lauseketta (huomaa taas oletuksen käyttö):

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + n' \cdot n'! + (n' + 1) \cdot (n' + 1)! \\ = (1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + n' \cdot n'!) + (n' + 1) \cdot (n' + 1)! = \\ (n' + 1)! - 1 + (n' + 1) \cdot (n' + 1)! \\ = (n' + 1)!(1 + n' + 1) - 1 = \\ (n' + 1)!(n' + 2) - 1 = (n' + 2)! - 1 \end{aligned}$$

Huomaa kertoman manipulointi. Kaikille n pätee että $(n+1)! = n!(n+1)$. Tämä seuraa melkein suoraan määritelmästä. Nyt induktiotodistus on siis valmis.

10. Osoita induktiolla että

$$2^n \leq n!$$

Kaikilla $n \geq 4$

Ratkaisu: Nyt siis tietyssä mielessä hieman erilainen tehtävä. Epäyhtälöiden manipulointi on hyvä osata monella muulla (tärkeimpänä ehkä tähän hätään Analyysi) kurssilla. Huomaa myös että perusaskeleena on $n = 4$ eikä 1 kuten aikaisemmin. Lukuunottamatta tätä tehtävä on aika lailla samanlainen kuin muutkin:

(a) Perusaskel: kun $n = 4$ niin

$$2^4 = 16 \leq 24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4!$$

Eli väite pätee.

(b) Nyt oletetaan taas että väite pätee jollekin $n = n'$. Eli että $2^{n'} \leq n'!$. Huomaa että $n' \geq 4$. Nyt pätee:

$$2^{n'+1} = 2 \cdot 2^{n'} \leq 2 \cdot n'! < n' \cdot n'! < (n' + 1)n'! = (n' + 1)!$$

Tässä kannattaa rauhassa miettiä mitä tarkalleen on tehty ja miksi tämä osoittaa sen mitä haluttiin. Olemme kuitenkin lähteneeet oletuksesta $2^{n'} \leq n'!$ ja saaneet $2^{n'+1} \leq (n' + 1)!$, eli olemme edenneet kaikkien induktion sääntöjen mukaan.

11. Mitä vikaa on induktio todistuksessa jossa osoitetaan kaikki hevoset saman väriseksi?

Ratkaisu: Induktiota verrataan usein dominoon. Induktiotodistuksessa osoitetaan ensiksi että ensimmäinen dominopala kaatuu ja että jos mv. dominopala kaatuu niin sitä seuraavakin kaatuu. Tässä “todistuksessa” on kuitenkin yksi dominopala jäänyt välistä. Induktiooletuksen argumentilla ei nimittäin ole mahdollista päästä tapauksesta $n = 1$ tapaukseen $n = 2$ koska silloin loppujoukossa ei ole hevosia johonka verrata. Eli sen takia todistus (joka intuitiivisesti oli pelkää roskaa) ei päde myöskään matemaattisesti.

12. Osoita että kaikille fibonaccin luvuille $f(n)$ pätee:

$$f(n) < 2^n$$

Ratkaisu: Toinen epäyhtälötehtävä, kuten tunnettua induktiota sovelletaan useimmiten vain luonnollisiin lukuihin, eli meidän pitää itse asiassa osoittaa että kaikille $n \in \mathbb{N}$ $f(n) < 2^n$ jossa $f(n)$ on n:nnes fibbonaciluku.

(a) Perustapaus: jos $n = 1$ niin $f(1) = 1$ ja $2^1 = 2$, eli $f(1) < 2^1$ ja väite pätee.

(b) Nyt täytyy tehdä vahva induktio oletus (toisen periaatteen oletus) oletetaan siis että kaikille $k \leq n'$ fibonacci luvulle pätee: $f(k) < 2^k$. Jos nyt tutkitaan arvoa $f(n'+1)$ niin saadaan:

$$f(n'+1) = f(n'-1) + f(n') < 2^{n'-1} + 2^{n'} = 2^{n'-1}(1+2) < 2^{n'-1}(2+2) = 2^{n'-1}2^2 = 2^{n'+1}$$

Taaskin kannattaa rauhassa miettiä miksi tämä toimii näin. Kuitenkin ollaan taas osoitettu kaikki induktiotodistukseen tarvittava. Eli väite pätee kaikille n

13. Osoita että kaikille fibonacci luvuille $f(n)$ $f(3n)$ on parillinen.

Ratkaisu: Nyt ehkä hieman haastavampi tehtävä. Pitäisi itse asiassa osoittaa että jos n on jaollinen kolmella niin n:nnes fibonacciluku on parillinen. Ei turhaan kannata pelästyä, tuttu induktiotodistusten "kaava" auttaa tässäkin:

(a) Perustapaus: Jos $n = 1$ niin $3n = 3$ ja kolmas fibonacciluku on $f(3) = 2$ joka on parillinen. Väite siis pätee.

(b) Taas oletetaan että väite pätee jollekin $n = n'$ eli että $f(3n')$ on parillinen. Huomaa että se että oletamme että luku on parillinen tarkoittaa että voimme kirjoittaa $f(3n') = 2k$ jollekin $k \in \mathbb{N}$. Tutkitaan taas arvoa $n' + 1$. Pitäisi osoittaa että $f(3(n'+1))$ on parillinen, tässä käytetään taas fibonacci lukujen määritelmää ahkerasti:

$$\begin{aligned} f(3(n'+1)) = f(3n'+3) = f(3n'+1) + f(3n'+2) \\ = f(3n'-1) + f(3n') + f(3n') + f(3n'+1) = \\ f(3n'-1) + f(3n') + f(3n') + f(3n'-1) + f(3n') \\ = 2f(3n'-1) + 3f(3n') = 2f(3n'-1) + 3 \cdot 2k = 2(f(3n'-1) + 3k) \end{aligned}$$

Pystyimme siis kirjoittamaan luvun $f(3(n'+1)$ luvun 2 ja jonkun muun tulona. Tämä osoittaa että $f(3(n'+1)$ on parillinen, aivan niin kuin pitikin.

14. Osoita että kaikille $x \in \mathbb{R}$ $x > 0$ ja luonnollisille luvuille n pätee:

$$(1+x)^n \geq 1 + xn$$

Ratkaisu: Tämän voisi osoittaa ilman induktiotakin vedoten esim. binomikaavaan. Mutta harjoituksen vuoksi teemme sen induktiolla. Olkoon siis $x \in \mathbb{R}$ $x > 0$ mv.

(a) Perusaskel: Kun $n = 1$ niin $(1 + x)^1 = 1 + x \geq 1 + 1 \cdot x$. Eli väite pätee.

(b) Oletetaan nyt että väite pätee arvolla $n = n'$. Nyt arvolle $n' + 1$ on voimassa:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^{n+1} \geq (1+x)(1+xn') = 1+xn'+x+x^2n' \geq 1+x+n'x = 1+(n'+1)x$$

Joka osoittaa väitteen.