Diskreetin Matematiikan Paja
Ratkaisuja viikolle 5. (28.4 - 29.4)
Jeremias Berg

Yleisiä kommenteja: Näissä tehtävissä aika usein ratkaisuna oli yksittäinen lasku. Kuitenkin vastaukseen olisi hyvä lisätä kommenteja siitä miksi jonkun tehtävän ratkaisuna on jokin lasku. Pelkkä vasaus ilman perusteluja on yleensä vain "puolet" tehtävästä, toki poikkeuksiakin löytyy.

1. Laske ilman laskinta:

   (a) $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$

   (b) $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 10$

   (c)
   $$\binom{20}{12} = \frac{20!}{12!8!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 19 \cdot 17 \cdot 15 \cdot 2 \cdot 13 = 125970$$

   (d) $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$

2. "Selitystehtävä": Keksi kertomus jossa esiintyy seuraavat laskut.

   (a) $\binom{732}{23}$

   (b) $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17$

   (c) $20!$

   Ratkaisu: Kyseessä siis hieman ehkä "erilainen" tehtävä. Ideana oli lähinnä selkeyttää kombinatoriikassa esiintyviä laskuja. Tarinat liittyivät lähinnä valitsemiseen, kunhan oli ymmärtänyt mitä laskuilla voi laskea niin melkeimpä minkälainen tarina tahansa kelpasi. Esimerkiksi:

   Mies meni kauppaan ostamaan 23 tikkaria. Koska kaupassa oli 723 erilaista tikkaria miehellä oli $\binom{732}{23}$ tapaa valita karkkinsa. Kotimatkalla mies söi kolme tikkaria. Päästyään kotiin hän järjesti loput siististi riviin keittiön pöydälle. Järjestämistapoja hänellä oli 20!. Pian miehen ovikello soi ja hänen neljä naapuriaan marssivat sisään. Nähdessään karkit pöydällä he halusivat maistiaises. Mies joutui antamaan jokaiselle yhden, tapoja tehdä jako hänellä oli $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17$.

3. Kerhossa on 25 jäsentä. Kuinka monella eri lailla voidaan valita:

   (a) Nelihenkinen johtokunta

   (b) Puheenjohtaja, sihteeri, varapuheenjohtaja ja rahastonhoitaja.

Ratkaisu: Lisää valintoja. Tehtävässä oleellisinta oli ymmärtää että jos valitaan johtokuntaa specifioimatta rooleja niin valintajärjestyksellä ei ole väliä. Johtokunta jossa on henkilöt A, B, C, D on sama kuin se jossa on B, C, D, A. Eli a) kohdassa vaihtoehtoja on: $\binom{25}{4} = 12650$

b) kohdassa taas valintajärjestyksellä on väliä. Nyt on eri asia valitaanko henkilö A puheenjohtajaksi tai sihteeriksi. Vaihtoehtoja valinnoille on $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 = 116280$. Kuten voi odottaakkiin eri vaihtoehtoja on enemmän kuin a) kohdassa.

4. Kuinka monta eri "sanaa" voidaan muodostaa sanoista:

   (a) Induktio

   (b) Diskreetti

   (c) Matematiikka

   (d) Abrakadabra

   Ratkaisu: Toinen klassinen (ainakin tällä kurssilla) esimerkki kombinatoriikasta käytännössä. Jos kaikki kirjaimet olisivat erit niin tehtävän voisi ajatella siten että pitää suorittaa (a kohdassa) 8 eri valintaa sille mikä kirjain menee millekin paikalle. Tämän lisäksi jos olemme kerran valinneet kirjaimelle paikan, emme voi valita sitä uudelleen. Tämä tarkoittaa että ensimmäiseksi kirjaimeksi voidaan valita 8 joukosta, toiseksi 7 etc. Yhteensä 8! eri valintoja. Kuitenkin nyt kun on samoja kirjaimia meidän täytyy vielä ottaa ne huomioon. Sanassa induktio on 2 I:tä. Eli jokaista permutaatiota missä I:t ovat tietyssä järjestyksessä kohti mukana on myös toinen joka on muuten sama paitsi että I:t ovat toisin päin. Jos jaamme siis kaiken 2:lla niin saamme eri permutaatioiden määrän. (Huom! kakkonen on hieman hämäävä, itse asiassa me jaamme 2! koska jos samoja kirjaimia on n niin ne voi järjestää $n!$ tavalla).

   Käydään nyt läpi tehtävien laskut:

   (a) $\frac{8!}{2!} = 20160$

   (b) $\frac{10!}{2!2!2!} = 453600$

   (c) $\frac{12!}{3!2!2!2!2!} = 4989600$

   (d) $\frac{11!}{5!2!2!} = 83160$

5. Kuinka monta sanaa voidaan muodostaa sanasta "MIMMI" jos kirjaimia saa jättää käyttämättä.

   Ratkaisu: Perusidealtaan samanlainen kuin edellinen tehtävä, kuitenkin tässä saa olla tarkkana, eri pituiset sanat kannattaa käsitellä eri tapauksina:

   "5 kirjainta":

   Vaihtoehtoja 5 kirjaimiselle sanalle on: $\dfrac{5!}{3!2!} = 10$

   "4 kirjainta":

Neljä kirjaimisia sanoja voidaan muodostaa kahdella eri lailla. Joko jätetään yksi "i" tai yksi "m" pois. Nämä tapaukset ovat toistensa poissulkevia koska samaan aikaan ei voida jättää pois sekä "i":tä ja "m":ää. Yhteensä saadaan siis $\frac{4!}{3!} + \frac{4!}{2!2!} = 4 + 6 = 10$
"3 kirjainta":
Nyt vaihtoehtoja alkaa olla jo hieman enemmän. Nyt voidaan joko jättää pois 2 "m":ää, 2 "i":tä tai 1 "m":ä ja 1 "i". Yhteensä tapauksia saadaan siis: $\frac{3!}{3!}+\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!} = 7$.
"2 kirjainta":
Vielä enemmän vaihtoehtoja. Joko poistetaan 3 kertaa m. 2 kertaa m ja 1 "i":ä, kerran "m" ja kaksi kertaa "i". Yhteensä: $\frac{2!}{2!} + \frac{2!}{2!} + 2! = 4$
"1 kirjain":
Enää kaksi vaihtoehtoa. Joko poistetaan 3 m:ää ja 1 i tai 2 i:tä ja 2 m:ää. Yhteensä $1 + 1 = 2$ tapausta.

Nyt saadaan siis tehtävän kysymä sanojen määrä eri tapauksien summana. Eli $10 + 10 + 7 + 4 + 2 = 33$ tapausta.

6. Kolmea noppaa heitetään, kuinka monta lopputulosta on mahdollista saada kun:

   (a) Nopat ovat saman värisiä.

   (b) Nopat ovat eri värisiä.

   Ratkaisu: Aika samantapainen tehtävä kuin johtokunta tehtävä. Tässä tapauksien erona on että kun nopat ovat saman värisiä emme voi erottaa lopputulokisa jossa on mukana samat silmäluvut eri järjestyksessä. Meidän täytyy siis jakaa kaikista mahdollisuuksista pois eri tavat järjestää 3 noppaa (3!). Yhteensä saadaan siis:

   (a) $\frac{6^3}{3!} = 120$ tapaa

   (b) $6^3 = 216$ tapaa

7. Kuinka monta eri permutaatiota voidaan muodostaa joukosta $\{A, C, F, M, P, R, T, X\}$ kun:

   (a) Permutaatiolle ei aseteta rajoituksia?

   (b) A:n ja C:n alkioiden välissä täytyy olla 2 tai 3 toista alkiota.

   (c) A:n ja C:n välissä ei saa olla 2:ta tai 3:a eri alkiota.

   (d) Ensimmäiset neljä alkiota valitaan joukosta $\{F, M, C, R, X\}$

   (e) Alkioiden A, C, F, M täytyy olla vierekkäin.

   Ratkaisu: Taaskin esimerkki tehtävästä jossa hieman monimutkaisemmat osat kannattaa jakaa tapauksiin.

   (a) Tässä vaiheessa tämän pitäisi sujua rutiinilla, koska meillä ei ole samoja kirjaimia eri mahdollisuuksia on $8! = 40320$

(b) Tässä tapoja sijoittaa A ja C siten että niiden välissä on 2 alkiota on 5. Tämän lisäksi kutakin tapaa kohti A ja C voivat olla kummin päin tahansa. Yhteensä siis 10 eri sijoitustapaa. A:n ja C:n sijoittaminen niin että niiden välissä on 3 alkiota on 8 eri. Jokaista sijoitustapaa kohtaan loput alkiot voidaan järjestää 6! eri tavalla. Eri tapoja yhteensä on siis

$$18 \cdot 6! = 12960$$

(c) Tässä voisi jakaa tapauksiin jossa välissä on 1, 4, 5, 6 alkiota. Kuitenkin pääsemme helpommalla kun huomaamme että tapojen joilla välissä ei ole 2:ta tai 3:a alkiota lukumäärä saadaan kun vähennetään kaikista tavoista sellaiset joissa A:n ja C:n välissä on kaksi tai kolme alkiota. Eli $8! - 12960 = 27360$ tapaa.

(d) Tässä siis kaivattu valinta voidaan tehdä $\binom{5}{4} = 5$ tavalla. Jokaista valintaa kohti valitut alkiot voidaan järjestää 4! eri tavalla ja jokaista tälläistä järjestystä kohti loput alkiot voidaan järjestää 4! eri tavalla. Yhteensä siis: $5 \cdot 4! \cdot 4! = 2880$ tapaa.

(e) Nyt voidaan ajatella alkiot A, C, F, M yhdeksi "alkioksi". Eli meillä on 5 eri alkiota jotka pitää järjestää, yhteensä 5! eri tapaa. Kuitenkin jokaista tapaa kohtaan voidaan alkiot järjestää 4! eri tavalla. Yhteensä siis $5! \cdot 4! = 2880$ tapaa.

8. Kuinka monta eri pokerikättä voidaan saada pakasta jossa ei ole jokereita.

   Ratkaisu: Taaskin valintatehtävä. Meillä on siis 52 korttia joista meidän pitää valita 5 ilman että järjestyksellä on väliä. Eli $\binom{52}{5} = 2598960$ tapaa.

9. Todista että kaikille $n \in \mathbb{N}$ $n > 0$ ja $0 \le k \le (n-1)$ pätee

$$\binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}$$

   Ratkaisu: Tässä kyseessä oli itse asiassa Pascalin kolmion mahdollistava identiteetti:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

   Tämä siis ei ole induktiotodistus vaikka ehkä näyttääkin siltä. Tässä saadaan suoraan mekaanisesti pyöriteltyä määritelmän avulla:

$$\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}=\frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}=$$
$$\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}=$$
$$\frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k-1)!(n-k)}+\frac{n!(k+1)}{k!(k+1)(n-k)!}=$$
$$\frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!}+\frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!}=$$
$$\frac{n!(n-k)+n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!}=\frac{n!((n-k)+(k+1))}{(k+1)!(n-k)!}=$$
$$\frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!}=\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}=$$
$$\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-1-k)!}=\frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k-1))!}=\binom{n+1}{k+1}$$

Joka siis osoittaa sen joka pitikin.

10. Osoita että kaikille $n \in \mathbb{N}$ ja $0 \leq k \leq n$ pätee:

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

Ratkaisu: Tämäkin seuraa melkeimpä suoraan määritelmistä:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!}=\binom{n}{n-k}$$

11. Päättele edellinen tehtävä vielä kombinatorisesti.

Ratkaisu: Tässä haettiin sanallista selitystä edellisen tehtävän havainolle. Ideana juri se että mekaanisesti määritelmää soveltamalla ei juuri saa ymmärrystä siitä miksi homma toimii. Tässä voidaan siis ajatella että meillä on n alkioinen joukko. Nyt tiedetään että voimme "valita" siitä k alkiota $\binom{n}{k}$ eri tavalla. Mutta toisaalta aina kun valitsemme k alkiota meille jää jäljelle $n-k$ alkiota. Eli jokaista k alkioista osajoukkoa vastaa yksikäsitteinen $n-k$:n alkion joukko. Eli lukumäärän täytyy olla samat.

12. Jalkapalloturnaukseen osallistuu 10 joukkuetta. Kuinka monella tavalla mitalit voidaan jakaa kun poislasketaan tasapelien mahdollisuus.

Ratkaisu: Taaskin perustehtävä. Tässä tehdään valinta, kun huomaamme että järjestyksellä on väliä, sillä on väliä saako joukkue kultaa hopeaa tai pronssia. Kullalle meillä on 10 vaihtoehtoa, hopealle 9 ja pronssille 8. Yhteensä siis $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ eri tapaa.

13. Perustele että $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ kun ajatellaan että $\binom{n}{k}$ kertoo kuinka monella eri lailla voidaan n:stä alkiosta valita k.

Ratkaisu: Meillä on siis n alkioinen joukko ja haluamme valita siitä k alkiota. Ensimmäinen alkio voidaan valita n:stä, toinen $n-1$:stä j.n.e knnes viimeinen voidaan valita $n-(k+1)$:stä. Yhteensä

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot .... \cdot n-(k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

eri vaihtoehtoa. Näissä on kuitenkin mukaanlaskettu sellaiset valinnat jossa samat alkiot ovat mukana valittuna eri järjestyksessä. Tälläisiä "kopioita" on yhteensä $k!$ kappaletta. Eli yhteensä

$$\frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

14. Luokalta jossa on 17 tyttöä ja 12 poikaa valitaan joukkue johon tulee 2 tyttöä ja 2 poikaa. Kuinka monella eri lailla tälläinen valinta voidaan tehdä.

Ratkaisu: Aika perustason tehtävä taas. Huomaa että järjestyksellä ei tässä ole väliä. Eli pojat voidaan valita $\binom{12}{2}$ tavalla ja jokaista valintaa kohti voidaan tytöt valita $\binom{17}{2}$ tavalla. Yhteensä:

$$\binom{17}{2}\binom{12}{2} = 8976$$

eri tapaa.

15. Olkoot $k, l, m \in \mathbb{N}$ ja $k+l+m=n$ osoita että on voimassa:

$$\binom{n}{k,l,m} = \binom{n-1}{(k-1),l,m} + \binom{n-1}{k,(l-1),m} + \binom{n-1}{k,l,(m-1)}$$

Ratkaisu: Lisää pyörittely tehtäviä, kunhan muistaa määritelmän niin tehtävä on yksinkertainen:

$$\binom{n-1}{(k-1),l,m} + \binom{n-1}{k,(l-1),m} + \binom{n-1}{k,l,(m-1)} =$$
$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!l!m!} + \frac{(n-1)!}{k!(l-1)!m!} + \frac{(n-1)!}{k!l!(m-1)!} = \frac{(n-1)!k}{k!l!m!} + \frac{(n-1)!l}{k!l!m!} + \frac{(n-1)!m}{k!l!m!} =$$
$$\frac{(n-1)!k + (n-1)!l + (n-1)!m}{k!l!m!} = \frac{(n-1)!(k+l+m)}{k!l!m!} =$$
$$\frac{(n-1)!(n)}{k!l!m!} = \frac{n!}{k!l!m!} = \binom{n}{k,l,m}$$

16. Todista binomilause. Eli että kaikille $n \in \mathbb{N}$ ja $x, y \in \mathbb{R}$ pätee:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Ratkaisu: Astetta haastavampi induktiotodistus. Nyt siis tarkoituksena pitää x ja y mielivaltaisina mutta vakioina ja indusoida n:nää. Perusmuoto todistuksessa on täysin sama kun muissakin induktiotodistuksissa, mutta kannattaa miettiä summamerkin käyttöä tarkasti: Olkoot siis $x, y \in \mathbb{R}$ mielivaltaisia.

(a) Perustapaus: $n = 0$. tällöin:

$$\begin{cases} (x+y)^0 = 1 \\ \sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \binom{0}{0} x^0 y^{0-0} = 1 \end{cases}$$

(b) Oletetaan nyt että väite pätee jollekin $n = n'$. Eli

$$(x+y)^{n'} = \sum_{k=0}^{n'} \binom{n'}{k} x^k y^{n'-k}$$

Lähdetään nyt manipuloimaan lauseketta arvolle $n' + 1$. Huomaa induktio-oletuksen käyttö.

$$(x+y)^{n'+1} = (x+y)(x+y)^{n'} = (x+y) \sum_{k=0}^{n'} \binom{n'}{k} x^k y^{n'-k} =$$

$$x \sum_{k=0}^{n'} \binom{n'}{k} x^k y^{n'-k} + y \sum_{k=0}^{n'} \binom{n'}{k} x^k y^{n'-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n'} \binom{n'}{k} x^{k+1} y^{n'-k} + \sum_{k=0}^{n'} \binom{n'}{k} x^k y^{(n'+1)-k} =$$

$$\sum_{k=1}^{n'+1} \binom{n'}{k-1} x^k y^{n'-(k-1)} + \binom{n'}{0} x^0 y^{(n'+1)-0} + \sum_{k=1}^{n'} \binom{n'}{k} x^k y^{(n'+1)-k} =$$

$$\sum_{k=1}^{n'} \binom{n'}{k-1} x^k y^{n'+1-k} + \binom{n'}{n'+1-1} x^{n'+1} y^{n'-(n'+1-1)} + \binom{n'}{0} x^0 y^{(n'+1)-0} +$$

$$\sum_{k=1}^{n'} \binom{n'}{k} x^k y^{(n'+1)-k} =$$

$$\sum_{k=1}^{n'} \left(\binom{n'}{k-1} + \binom{n'}{k} \right) x^k y^{n'+1-k} + \binom{n'}{n'} x^{n'+1} y^0 + \binom{n'}{0} x^0 y^{(n'+1)}$$

$$\sum_{k=1}^{n'} \binom{n'+1}{k} x^k y^{n'+1-k} + \binom{n'+1}{n'+1} x^{n'+1} y^{(n'+1)-(n'+1)} + \binom{n'+1}{0} x^0 y^{(n'+1)-0}$$

$$\sum_{k=0}^{n'+1} \binom{n'+1}{k} x^k y^{n'+1-k}$$

Tämä kannattaa lukea läpi tarkasti. Tässä on siis ensin hajotettu summa. Tämän jälkeen muokattu termejä jotta päästäisiin käyttämään identiteettiä

$$\left(\binom{n'}{k-1} + \binom{n'}{k}\right) = \binom{n'+1}{k}$$

kun $1 \leq k \leq n$. Tämä ei ole täysin sama kuin aikasemmin todistettu, mutta ekvivalentti sen kanssa (jätetään lukijalle verifioitavaksi). Tämän jälkeen saadaan vielä puuttuvat termit niistä jotka aikasemmin poistettiin summasta, tämä koska $\binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$ $\forall n$. Lopulta ollaan siis saatu induktiotodistuksen vaatima: "oletuksesta n seuraa $n+1$" joka yhdistettynä perustapaukseen tarkoittaa että väite pätee kaikille $n \in \mathbb{N}$.

17. Osoita että kaikille $n \in \mathbb{N}$

$$\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$$

ja

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$$

Ratkaisu: Tämä tehtävä olisi ehkä ollut hyödyllisempi ennen edellistä induktio todistusta. Tässäkin voi suoraan pyöritellä määritelmistä tai perustella sillä että riippumatta alkioiden määrästä joukosta voidaan valita kaikki alkiot tai 0 alkiota täsmälleen yhdellä tavalla.

18. Osoita että kaikille $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Ratkaisu: Tähänkin olisi mahdollista tehdä melko hankalahko induktiotodistus. Kuitenkin helpommalla pääsee kun soveltaa binomikaavaa: annetaan nimittäin x ja y olla 1. Tällöin binomikaava antaa:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

Tämä osoittaa siis sen että n alkioisesta joukosta voidaan valita eri kokoisia alijoukkoja yhteensä 2^n eri tavalla. Eli $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$

19. Laske auki: $(x+3)^7$

Ratkaisu: Tämäkin menee suoraan binomikaavalla:

$$\begin{aligned}(x+3)^7 = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} x^k 3^{7-k} = \\ \binom{7}{0}x^0 3^7 + \binom{7}{1}x^1 3^6 + \binom{7}{2}x^2 3^5 + \binom{7}{3}x^3 3^4 + \\ \binom{7}{4}x^4 3^3 + \binom{7}{5}x^5 3^2 + \binom{7}{6}x^6 3^1 + \binom{7}{7}x^7 3^0 = \\ 3^7 + 7x3^6 + 21x^2 3^5 + 35x^3 3^4 + \\ 35x^4 3^3 + 21x^5 3^2 + 7x^6 3^1 + x^7 3^0 = \\ 2187 + 5103x + 5103x^2 + 2835x^3 + 945x^4 + 189x^5 + 21x^6 + x^7 =\end{aligned}$$

20. Mikä on termin $x^{10}y^7$ kerroin $(x^2+3y)^{12}$ kehityksessä.

Ratkaisu: Taas binomikaavan sovellusta:

$$(x^2+3y)^{12} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} (x^2)^k (3y)^{12-k}$$

Nyt $x^{10}y^7$ vastaa edellisessä summassa sitä kun $k=5$. Eli:

$$\binom{12}{5}(x^2)^5(3y)^{12-5} = 1732104x^{10}y^7$$

21. Todista vielä että kaikille $p \in \mathbb{R}$ pätee:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1$$

Ratkaisu: Binomikaava on vahva työkalu. Se kelpaa nimittäin tähänkin. Annetaan binomikaavassa $x=p, y=(1-p)$. Nyt:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p+(1-p))^n = 1^n = 1$$