Diskreetin Matematiikan Paja

Ratkaisuehdotelmia viikolle 3. (31.3 - 1.4)

Jeremias Berg

1. Määritä seuraavien kuvauksien käänteiskuvaukset:

   (a) $f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\} \quad f(1) = a, f(2) = b, f(3) = c$

   (b) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(n) = \begin{cases} n+7 & 0 \leq n < 7 \\ n-7 & 7 \leq n < 14 \\ n & n \geq 14 \end{cases}$

   (c) $f : [-2, \infty) \to [1, \infty), f(x) = x^2 + 4x + 5$

   Ratkaisu: Ensin siis käänteiskuvauksen käsite. Käänteiskuvaus on kätevä työkalu kun halutaan todistaa eri funktioiden olevan bijektioita. Siihen voidaan nimittäin käyttää tulosta jonka mukaan kuvaus on bijektio jos ja vain jos sen käänteisrelaaito on funktio. Tälläisissä tehtävissä ei formaaliin "ratkaisuun" tarvitse kirjoittaa kuinka tulokseen päästiin, vain määrittää kuvaus ja osoittaa että se täyttää käänteiskuvauksen määritelmän.

   Eli jos $f : A \to B$ on kuvaus niin kuvaus $g : B \to A$ on sen käänteiskuvaus jos $\forall x \in A$ ja $\forall y \in B$ pätee:

   $$f \circ g(y) = f(g(y)) = y \text{ ja}$$
   $$g \circ f(x) = g(f(x)) = x$$

   Määritelmän avulla voidaan nyt määrittää tehtävien kuvauksien käänteiskuvaukset. Merkitään sitä kaikissa kohdissa g:llä.

   (a) $g : \{a, b, c\} \to \{1, 2, 3\} \quad g(a) = 1, g(b) = 2, g(c) = 3$

   (b) Tämä vatii hieman miettimistä. Etsitään siis kuvausta $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jolle $g(f(n)) = n \; \forall n \in \mathbb{N}$

      i. Jos $0 \leq n < 7$ niin:

      $$y = n + 7 \Leftrightarrow n = y - 7$$

      Tämän lisäksi jos $0 \leq n < 7$ niin $7 \leq y < 14$. Eli määritellään $g(y) = y - 7 : 7 \leq y < 14$. Nyt pätee että kaikille $0 \leq n < 7$:

      $$g(f(n)) = g(n + 7) = n + 7 - 7 = n$$

      .

ii. Jos nyt $7 \leq n < 14$ niin

$$y = n - 7 \Rightarrow n = y + 7$$

Tämän lisäksi $0 \leq y < 7$. Eli määritellään $g(y) = y + 7 \quad 0 \leq y < 7$. Taas pätee että kaikille $7 \leq n < 14$:

$$g(f(n)) = g(n-7) = n - 7 + 7 = n$$

iii. Jos $n \geq 14$ niin käänteiskuvaukseksi kelpaa triviaalisti

$$g(y) = y$$

. Yhdistämällä eri osat saadaan lopulta:

$$g(y) = \begin{cases} y + 7 & 0 \leq y < 7 \\ y - 7 & 7 \leq y < 14 \\ y & y \geq 14 \end{cases}$$

(c) Tässä käytetään temppua jossa asetetaan $y = f(x)$. Ratkaistaan yhtälö x:lle jolloin itse asiassa muodostetaan käänteiskuvaus. Huomaa että juuri tätä tehtävää varten ei tosiaan ole oleellista kuinka käänteiskuvaus muodostetaan. Kunhan se muodostetaan ja osoitetaan toimivan.

$$\begin{aligned} y = x^2 + 4x + 5 \Leftrightarrow y - 5 = x^2 + 4x \Leftrightarrow \\ y - 5 + 4 = x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow y - 1 = (x+2)^2 \\ \sqrt{y-1} = x + 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y-1} - 2 \end{aligned}$$

Tässä ei tarvitse ottaa huomioon negatiivista juurta koska annetussa funktiossa $x \geq -2$. Määritellään nyt

$$g(y) = \sqrt{y-1} - 2$$

Tällöin g on määritelty välillä $y \geq 1$ (miksi?) ja saa arvoja väliltä $g(y) \geq -2$. Osoitetaan vielä että g on f:än käänteiskuvaus. Tätä varten otetaan mv alkiot $x \in [-2, \infty)$ ja $y \in [1, \infty)$. Nyt pätee:

$$\begin{aligned} g(f(x)) = g(x^2 + 4x + 5) = \sqrt{x^2 + 4x + 5 - 1} - 2 = \\ \sqrt{(x+2)^2} - 2 = |x + 2| - 2 = x + 2 - 2 = x \\ f(g(y)) = f(\sqrt{y-1} - 2) = \left(\sqrt{y-1} - 2\right)^2 + 4\left(\sqrt{y-1} - 2\right) + 5 = \\ \left(\sqrt{y-1}\right)^2 - 4\left(\sqrt{y-1}\right) + 4 + 4\left(\sqrt{y-1}\right) - 8 + 5 = \\ y - 1 + 4 - 8 + 5 = y \end{aligned}$$

Eli määritelmän mukaan g on f:n käänteiskuvaus, huomaa itseisarvon käyttö. Jonkun luvun neliön juuri on itse asiassa saman luvun itseisarvo, mutta koska $x > -2 \Rightarrow x + 2 > 0$ niin itseisarvon saa poistaa.

2. Muodosta yhdistetyt kuvaukset $f \circ g$ ja $g \circ f$ kun $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$ ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{x^2+1}$

   Ratkaisu:

$$f \circ g = f(g(x)) = \left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2 + 1$$
$$g \circ f = g(f(x)) = \frac{1}{(x^2+1)^2 + 1}$$

   Tehtävän tarkoitus oli vain harjaannuttaa yhdistämään kuvauksia. Huomaa myös että tässä pitää mainita että kuvaukset ovat "järkeviä", eli että lähtö ja maalijoukot sopivat yhteen.

3. Olkoot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3$ ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x - 1$. Osoita:

   (a) f on bijektio.

   (b) g on bijektio

   (c) $f \circ g$ on bijektio

   Ratkaisu: Tehtävän ideana on antaa erikoistapaus seuraavan tehtävän yleisestä todistuksesta, eli että kahden bijektion yhdistetty kuvaus on bijektio.

   (a) Määritellään $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \sqrt[3]{x}$. Nyt kaikille $x \in \mathbb{R}$ pätee:

$$h(f(x)) = h(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x$$
$$f(h(x)) = f\left(\sqrt[3]{x}\right) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$$

   Eli h on f:n käänteiskuvaus ja koska f:llä on käänteiskuvaus niin se on myös bijektio.

   (b) Määritellään nyt $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = x + 1$. Nyt taas $\forall x \in R$:

$$h(g(x)) = h(x - 1) = x - 1 + 1 = x$$
$$g(h(x)) = g(x + 1) = x + 1 - 1 = x$$

   Eli h on g:n käänteiskuvaus ja g on bijektio.

   (c) Muodostetaan ensin $f \circ g$:

$$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(g(x)) = (x - 1)^3$$

   Voidaan nyt muodostaa kuvaus h seuraavasti: $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = \sqrt[3]{x} + 1$. Nyt $\forall x \in \mathbb{R}$ pätee:

$$h(f \circ g(x)) = h\left((x-1)^3\right) = \sqrt[3]{(x-1)^3} + 1 = x - 1 + 1 = x$$
$$f \circ g(h(x)) = f \circ g(\sqrt[3]{x} + 1) = \left(\sqrt[3]{x} + 1 - 1\right)^3 = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$$

   Eli $f \circ g$:kin on bijektio.

4. Olkoot A, B ja C joukkoja ja $f : A \to B$, $g : B \to C$ bijektioita. Osoita että $g \circ f : A \to C$ on bijektio.

   Ratkaisu: Nyt todistetaan yleisesti asia josta nähtiin esimerkki jo aiemassa tehtävässä. Bijektiivisyyden osoittamiseksi voitaisiin etsiä taas käänteiskuvaus. Mutta harjoituksen vuoksi osoitetaan se määritelmien perusteella: Eli osoitetaan että $g \circ f : A \to C$ on bijektio osoittamalla se injektioksi ja surjektioksi:

   Injektiivisyys: Otetaan kaksi mv. alkiota $x_1, x_2 \in A$ ja oletetaan että: $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$. Nyt pitäisi osoittaa $x_1 = x_2$. Koska $f(x_1) \in B$ ja $f(x_2) \in B$ ja g on injektiivinen niin oletuksesta $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ seuraa $f(x_1) = f(x_2)$. Nyt sovelletaan samaa uudestaan. Koska f on injektiivinen niin oletuksesta $f(x_1) = f(x_2)$ seuraa $x_1 = x_2$. Eli aloitettiin oletuksesta: $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ ja johdettiin $x_1 = x_2$. Tämä osoittaa injektiivisyyden.

   Surjektiivisuus: Nyt pitäisi osoittaa että $g \circ f$ on surjektiivinen. Tätä varten otetaan mv. alkio $c \in C$ ja osoitetaan että sille löytyy alkio joukosta $a \in A$ siten että $g \circ f(a) = c$. Nyt koska $c \in C$ ja g on surjektio, niin $\exists b \in B : g(b) = c$. Sitten sovelletaan taas samaa. Koska $b \in B$ ja f on surjektio niin $\exists a_0 \in A : f(a_0) = b$. Nyt jos tämä a_0 kuvataan kuvauksella $g \circ f$ niin huomataan että:

   $$g \circ f(a_0) = g(f(a_0)) = g(b) = c$$

   Eli $g \circ f$ on surjektio ja sen takia myös bijektio.

5. Olkoot $A = \{4, 5, 6\}$ ja $B = \{6, 5, 4, 3\}$. Määritellään vielä:

   $$f : A \to B \ f = \{(4,5), (5,6), (6,4)\} \quad g : A \to B \ g = \{(5,4), (6,5), (4,6)\}$$

   Onko g f:än käänteiskuvaus? (Katso tarkasti...). Muodosta, jos mahdollista $f \circ g$

   Ratkaisu: Tässä on kyseessä lisätä ymmärrystä lähtö ja maalijoukkojen tärkeydestä. Molempien kuvauksien lähtö ja maalijoukot ovat samat. Eli ne eivät ole toistensa käänteiskuvauksia. Ei voida myöskään muodostaa $f \circ g$. Tämä ei ole järkevä merkintä näille kuvauksille.

6. Mitkä alkiot kuuluvat joukkoon:

   (a) $[4] = \{1, 2, 3, 4\}$
   (b) $[5] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
   (c) $[13] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$

   Huomioitavaa: Näitä joukkoja käytetään tavallaan mittapuuna joukkojen koon formaalissa käsittelyssä. Eli joukon ovat saman kokoiset jos niiden välillä on bijektio. Mikäli jokin joukko on saman kokoinen joukon $[n]$ kanssa niin sanotaan että silloin siinä on n alkiota. Vertaa esim metriin: ranskassa säilytetään mittaa jonka mukaan metri määritellään, sanotaan että kaikki muut asiat jotka ovat saman pituisia tämän mitan kanssa ovat metrin mittaisia.

7. Olkoot $A = \{Lasse, Madde, Peter, Heidi\}$ ja $B = \{Ruusu, Tulppaani, Auringonkukka, Kielo\}$ Osoita että joukoissa on sama määrä alkioita "laskematta" alkioita. (Mikä olikaan mahtavuuden määritelmä?)

   Ratkaisu: Nyt sitten joukon koon formaalia käsittelyä. Joukot ovat saman kokoiset jos niiden välillä on yksikin bijektio. Tehtävän osoittamiseksi riittää siis määritellä bijektio joukkojen välille. Määritellään siis: $g : \{Lasse, Madde, Peter, Heidi\} \to \{Ruusu, Tulppaani, Auringonkukka, Kielo\}$ seuraavasti:

   $$g(Lasse) = Kielo \; g(Madde) = Tulppaani \; g(Peter) = Ruusu \; g(Heidi) = Auringonkukka$$

   Triviaalisti nähdään että tämä on bijektio ja joukoissa on siis yhtä paljon alkioita. Huomaa ettemme laskeneet alkioita missään vaiheessa. Huomaa myös että tässäkään ei ole väliä "kumpaan suuntaan" bijektio muodostetaan. Bijektion käänteiskuvaus on kuvaus toiseen suuntan ja sekin on bijektio.

8. Osoita määritelmän nojalla että joukoissa $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ja $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ on yhtä monta alkiota.

   Ratkaisu: Taas sama asia. Määritellään $g : \{2, 4, 6, 8, 10\} \to \{1, 3, 5, 7, 9\}, g(2) = 1$ $g(4) = 3$ $g(6) = 5$ $g(8) = 7$ $g(10) = 9$ Ja huomataan että tämä on bijektio. Eli joukoissa on yhtä monta alkota.

9. Olkoon A ja B joukkoja ja $h : A \to B$ bijektio. Oletetaan vielä että A on äärellinen. Osoita että silloin B on äärellinen ja $|A| = |B|$

   Ratkaisu: Sitten vielä määritellään tarkasti mitä "äärellinen" tarkoittaa. Sanomme että joukko A on äärellinen jos ja vain jos: $\exists f : A \to [n_0] : n_0 \in \mathbb{N}$. Jossa n_0 on siis jokin luonnollinen luku ja f on bijektio. Eli osoittaaksemme että joukko B on äärellinen meidän täytyisi siis löytää bijektio $B \to [n_1]$ jossa $n_1 \in \mathbb{N}$

   Nyt koska A oli äärellinen, niin tiedämme myös määritelmän nojalla että $\exists g : A \to [n]$ joka on bijektio. Tämän lisäksi tiedetään että käänteiskuvaus $h^{-1} : B \to A$ on myös bijektio. Nyt voidaan määritellä $f : B \to [n] : f = g \circ h^{-1}$. Koska f on kahden bijektion yhdistetty kuvaus, voimme vedota aikaisempiin todistamiimme seikkoihin ja suoraan sanoa että f on bijektio. Tämä osoittaa että B on äärellinen. Tämän lisäksi tiedämme että sekä joukolta A että joukolta B on bijektio samaan joukkoon $[n]$. Eli niissä on myös sama määrä alkioita. $|A| = |B|$

10. Olkoon A kaikkien parillisten luonnollisten lukujen joukko ja B parittomien. Osoita että $f : A \to B, f(x) = x + 1$ on bijektio.

    Ratkaisu: Ensin kannattaa hieman miettiä että kuvaus on järkevästi määritelty. Eli riippumatta mistä parillisesta luvusta aloitetaan niin kuvaamalla sitä joudumme aina parittomaan lukuun. Tämä voidaan motivoida seuraavasti. Jos $x \in A$ niin x on muotoa $x = 2n$ jollekin $n \in \mathbb{N}$. Nyt jos tähän lisätään 1 niin lopputulos on muotoa $2n + 1$, eli pariton.

Nyt voimme määrittää käänteiskuvausehdokkaan: $g : B \to A : g(x) = x - 1$. Nyt kaikille $a \in A$ ja $b \in B$ pätee:

$$f(g(b)) = f(b-1) = b - 1 + 1 = b$$
$$g(f(a)) = g(a+1) = a + 1 - 1 = a$$

11. Olkoot A kuten yllä. Osoita että $g : \mathbb{N} \to A, g(x) = 2x$ on myös bijektio. Onko siis luonnollisia lukuja vai parillisia luonnollisia lukuja "enemmän?"

    Ratkaisu: Osoitetaan kuvaus bijektioksi määrittelemällä sille käänteiskuvaus. Varteenotettava ehdokkaana kuvaukseksi voisi olla: $h : A \to \mathbb{N} : h(x) = \frac{x}{2}$ Huomaa että jos $x \in A$ niin $x = 2n$ jollekin $n \in \mathbb{N}$ ja siten $h(x) \in \mathbb{N}$ myöskin. Nyt jäljellä on vielä näyttää määritelmän avulla että h on g:n käänteiskuvaus otetaan mv. $a \in A$ ja $n \in \mathbb{N}$: Nyt pätee

$$h(g(n)) = h(2n) = \frac{2n}{2} = n$$
$$g(h(a)) = g\left(\frac{a}{2}\right) = 2\frac{a}{2} = a$$

12. Seuraava katkelma on mukaelma Stanislaw Leminin novellista The Interstellar Milkman, Ion the Quiet, joka on ilmestynyt N.Ya. Vilenkinin kirjassa "Stories About Sets"(Academic Press, 1968).

    Hotelli Kosmos sijaitsee jossakin tähtisumun ACD-1587 tienoilla. Tässä hotellissa on numeroituvasti ääretön määrä huoneita. Ion the Quiet saapuu fotoniraketillaan Kosmoksen pihalle aikoen yöpyä hotellissa. Valitettavati hotelli on täynnä, sillä parhaillaan on menossa universaalieläintieteilijä kongressi. Sen osaanottajat, joita on numeroituvasti ääretön määrä, ovat vallanneet hotellin. Miten hotellin neuvokas johtaja järjestää?
    Vihje: Näissä kaikissa tehtävissä on oikeastaan tarkoitus osoittaa että joukot $A = \{\text{hotellin huoneet}\}$ ja $B = \{\text{ihmiset joiden pitäisi mahtua huoneisiin}\}$ ovat koko ajan yhtä "suuria" sopivien funktioiden avulla.

13. Hieman myöhemmin hotellin ovelle kolkutetaan taas. Nyt ulkona on naapurihotelli Galaksin kaikki (numeroituvasti) äärettömän monta asukasta. Galaksissa syttyi tulipalo ja kaikki sen asukkaat jouduttiin evakuoimaan. Auta taas hotellin johtajaa asukkaiden majoittamisessa.

14. *Aamulla vaikeudet jatkuvat. Jokaisessa linnunratajärjestelmässä?, joita on kaikkiaan numeroituvasti ääretön määrä, on Kosmoksen kaltainen hotelli ja ne kaikki päätetään sulkea. Kaikki asukkaat kuljetetaan Kosmoksen pihalle. Miten hotellin johtaja saa majoitettua kaikki uudet asukkaat Kosmokseen?

15. Kertomus Hotelli Kosmoksesta jatkuu: Hotelliyhtymän johdolta tuli määräys laatia luettelo kaikista mahdollisista tavoista, joilla hotelliin voidaan sijoittaa vieraita.

Täyttä huonetta tarkoittaa numero 1 ja tyhjää? 0. Esimerkiksi 101010 . . . tarkoittaa, että paritonnumeroiset huoneet ovat varattuja ja parillisnumeroiset vapaita. Muutaman päivän ahkeran työn jälkeen hotellin johtaja tuli Ion the Quietin luo mukanaan pitkä lista (numeroituvasti, äärettömän pitkä). Ion väitti, että listalla ei voi olla kaikkia mahdollisia tapoja vieraiden sijoittamiseksi. Miten hän perusteli väitteensä? *Tähän auttaa vastaoletus. Oleta että listassa oli kaikki mahdolliset tavat ja yritä muodostaa uusi tapa joka ei ollut listassa*

Ratkaisut kaikkiin kosmostehtäviin:
Vähän erilainen tehtäväsarja. Näissä käsitellään äärettömiä joukkoja, jonka parissa ei, kuten sanottua, intuitiosta ole paljon hyötyä, kaksi joukkoa ovat saman kokoiset jos löydetään bijektio niiden välille, riippumatta siitä "tuntuuko se loogiselta". Merkitään koko ajan $A = \{\text{hotellin huoneet}\}$ ja $B = \{\text{ihmiset joiden pitäisi mahtua huoneisiin}\}$.

Ensimmäisessä tehtävässä sanotaan ensin että hotelli on täynnä. Eli $|A| = |B| = |\mathbb{N}|$, mutta Ion haluaisi myös huoneen. Eli Ion lisätään joukkoon B. Intuitiivisesti pitäisi $|B| = |A| + 1$. Mutta nyt oli jo äärettömän monta huonetta, eli voimme löytää kuvauksen jolla osoitamme että joukot ovat edelleen saman kokoisia. Emme voi laittaa Ionia "viimeiseen huoneeseen". Tämä koska huoneita on äärettömän paljon eli Ionin pitäisi kävellä äärettömän pitkää käytävää pitkin äärettömän kauan. Mutta jos määritellään :

$$g : B \to A : g(x) = \begin{cases} 1 : & x = \text{Ion the Quiet} \\ x + 1 & x = \text{ ihminen joka aikaisemmin asui huoneessa x} \end{cases}$$

niin huomataan että tämä on selvästi bijektio uuden joukon B ja A välille, kaikille asukkaile löytyy hyvin määritelty huone. Eli taas mahtuu, äärettömään voidaan lisätä yksi lisäämättä joukon kokoa.

Toisessa tehtävässä pitäisi taas lisätä ihmisiä joukkoon. Nyt hotelli on taas alussa täynnä $|A| = |B|$. Nyt sinne ei lisätä vain yhtä asukasta, vaan numeroituvan äärettömän monta asukasta. Samaa temppua kuin ensiksi ei voi soveltaa koska emme voi siirtää hotellin nykyisiä asukkaita äärettömän monta askelta eteenpäin. Tämä ei olisi yksikäsitteistä. Sen sijaan sovelletaan samaa temppua kuin silloin kun osoitettiin että parillisia lukuja on yhtä paljon kun lukuja yhteensä. Määritellään

$$g : B \to A : g(x) = \begin{cases} 2x : & x = \text{ hotellissa jo ollut asukas} \\ 2x + 1 & x = \text{ hotelli Galaksin evakko} \end{cases}$$

Tämä ollaan aikaisemmin jo osoitettu bijektioksi, eli taas mahtuu.

Kolmannessa tehtävässä samaa ideaa laajennetaan. Nyt on jo numeroituvan ärrettömän monta joukkoa numeroituvasti äärettömän monta ihmistä. Nämä kaikki pitäisi mahduttaa "vain" numeroituvasti äärettömään joukkoon. Ongelmana on siis löytää kaikille yksikäsitteinen huone ilman että ketään siiretään äärettömän paljon.

Koska hotellien määrä on numeroituvasti ääretön niin voimme antaa jokaiselle hotellille oman järjestysnumeron. Eli hotelli Kosmos olkoon hotelli numero 1, Galaksi 2 jne. Samalla lailla jokaisessa hotellissa on numeroituvan monta asukasta, voimme siis antaa jokaiselle asukkaalle järjestysnumeron *omaan hotelliinsa verrattuna.* Eli voimme sanoa että kyseessä on 4:nnen hotellin 123:s asukas. Eli jokainen majoitettava asukas voidaan liittää yksikäsitteisesti kahteen lukuun, x ja y jossa x on asukkaan alkuperäisen hotellin numero ja y asukkaan huoneen numero alkuperäisessä hotellissa. Olkoon nyt $p(x)$ x:nnes alkuluku. ($p(1) = 2, p(2) = 3, p(3) = 5$ etc.) Nyt voidaan määrittää kuvaus $g(x, y) : B \to A$:

$$g(x, y) = p(x)^y$$

Eli otetaan hotellin järjestysnumeron mukainen alkuluku ja korotetaan sitä alkuperäishuoneen potenssiin. Tällä lailla saadaan aikaan yksikäsitteiset huoneet kaikille.

Sitten vielä viimeinen tehtävä. Pitäisi osoittaa että eri tapoja täyttää kosmoksen huoneet ei enää olekkaan numeroituvan monta. Toisin sanoen että tälläistä listaa ei voi muodostaa. Mietitään vielä vähän että miksi. Tehdään vastaoletus, tälläinen lista on olemassa. Tämä lista voisi alkaa vaikka seuraavasti:

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\
\vdots & & & & & & &
\end{array}$$

No niin, mitäs hienoa tässä nyt sitten on? Nyt voimme muodostaa listaan kuulumattoman tavan ja osoittaa ettei se kuulu listaan. Tarkastellaan listan diagonaalia: Eli semmoinen tapa joka alkaa $0101110\cdots$. Käännetään jokainen 1 0:ksi ja 0 1:ksi. Saadaan tapa: $1010001\cdots$. Nyt tämä tapa ei voi olla mukana listalla. Perustellaan tämä väite:

Tapa ei voi olla ensimmäisenä koska sitä on muutettu ensimmäiseen verrattuna ensimmäisen alkion kohdalta.
Tapa ei voi olla toisena koska sitä on muutettu toiseen verrattuna toisen alkion kohdalta.
Tapa ei voi olla kolmantena koska sitä on muutettu kolmanteen verrattuna kolmannen alkion kohdalta.
$\vdots$
Tapa ei voi olla n:tenä koska sitä on muutettu n:nteen verrattuna n:nen alkion kohdalta.
Eli tapa ei voi olla listalla koska silloin tavan pitäisi olla sama kuin jonkin listalla

kohdassa n olevan tavan. Huomaa että tämä ei ole "formaali" todistus. Formaalisti asian voisi osoittaa induktiolla. Tämä jääköön harjoitustehtäväksi.

16. Osoita että

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$$

Ratkaisu: Eli mahtavuuksia pitäisi osoittaa samaksi. Tämähän totuttuun tyyliin tarkoittaa että etsitään bijektiota. Helpoiten bijektio löytyy suntaan: $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$. Suunnalla ei sinäänsä tosiaan ole väliä, bijektion käänteiskuvaus on bijektio toiseen suuntaan. Määritellään siis:

$$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} : g(x) = \begin{cases} -2x & x < 0 \\ 2x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

. Nyt pitäisi vielä osoittaa tämä bijektioksi. Helpoiten se käy määrittelemällä:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} : f(n) = \begin{cases} -\frac{n}{2} & \text{n on parillinen} \\ \frac{n-1}{2} & \text{n on pariton} \end{cases}$$

Ja osoittamalla että nämä ovat toistensa käänteiskuvauksia, $\forall z \in \mathbb{Z}$ ja $n \in \mathbb{N}$ pätee nimittäin:

$$f(g(z)) = \begin{cases} f(-2z) = -\frac{-2z}{2} = z \; z \leq 0 \\ f(2z+1) = \frac{2z+1-1}{2} = z \; z > 0 \end{cases}$$

$$g(f(n)) = \begin{cases} g\left(-\frac{n}{2}\right) = -2\frac{-n}{2} = n \text{ n on parillinen} \\ g\left(\frac{n-1}{2}\right) = 2\frac{n-1}{2} + 1 = n \text{ n on pariton} \end{cases}$$

Joka osoittaa että f on g:n käänteiskuvaus ja siten myös että f on bijektio.

Huom Seuraavissa tehtävissä tarvitaan muutamaa määritelmää, tässä X on joukko ja R sen relaatio. Relaatio R on:

(a) Reflexiivinen jos $\forall x \in X \; (x, x) \in R$ (Kaikki joukon alkiot ovat relaatiossa itsensä kanssa).

(b) Symmetrinen jos $\forall x, y \in X \; (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$ (Jokaisesta alkiosta joka on relaatiossa jonkun toisen kanssa "pääsee myös takaisin", ajattele nuolikaavioita.)

(c) Transitiivinen jos $\forall x, y, z \in X \; ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ (Taas voisi ajatella että jos kahden alkion välillä on 2 mittainen "polku"niin niiden välillä on myös 1 mittainen).

17. Ovatko seuraavat relaatiot R reflexiivisiä, symmetrisiä tai transitiivisia perusjoukossa X kun?

(a) $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ja $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 3)\}$

(b) $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ja $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (4, 4)\}$

(c) $X = \mathbb{R}$ ja $R =<$ (eli $xRy \Leftrightarrow x < y$)

(d) $X = \mathbb{Z}$ ja $R =\leq$

Ratkaisu: Huom tässäkin oli huonosti asetettu orginaalitehtävä. a ja b kohdissa perusjoukon oli tarkoitus olla niin kuin se nyt on kirjoitettuna.

(a) Relaatio ei ole refleksiivinen koska esim $(3,3) \notin R$.
Relaatio ei ole transitiivinen koska esim. $(3,4) \in R$ ja $(4,3) \in R$ mutta $(3,3) \notin R$
Relaatio on symmetrinen. Jokaisen mukana olevan käänteispari on myös mukana. Huomaa että esim. $(1,1)$ käänteispari on $(1,1)$

(b) Relaatio ei ole refleksiivinen koska esim $(1,1) \notin R$.
Relaatio ei ole transitiivinen koska $(1,2) \in R$ $(2,1) \in R$ mutta $(1,1) \notin R$.
Relaatio on symmetrinen. Käänteisparit ovat mukana.

(c) Relaatio ei ole refleksiivinen, millekään luvulle ei päde $x < x$.
Relaatio ei ole symmetrinen (itse asiassa se on antisymmetrinen)
Relaatio on transitiivinen. Olkoot $x, y, z \in \mathbb{R}$ mv. siten että $x < y \wedge y < z$. Tällöin myös $x < z$. Eli $(x,y) \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

(d) Muuten täysin sama perustelu kuin äsken mutta relaatio on vielä refleksiivinenkin. Kaikille $z \in \mathbb{Z}$ $z \leq z$.

18. Olkoot $X = \{1,2,3,4\}$ muodosta relaatio $R \subset X \times X$ joka on:

(a) ei-reflexiivinen, symmetrinen, transitiivinen.

(b) reflexiivinen, ei-symmetrinen, transitiivinen

(c) reflexiivinen, symmetrinen, ei-transitiivinen

(d) reflexiivinen symmetrinen transitiivinen

Ratkaisu:

(a) Ainoa kelpaava relaatio on $R = \emptyset$. Perustellaan että mikään muu ei käy. (Perusteluja ei vaadittu tehtävään).

Osoitetaan siis että jos epätyhjä relaatio R on sekä symmetrinen että transitiivinen niin se on myös refleksiivinen. Koska R oli epätyhjä niin löytyy ainakin yksi $\exists (x,y) \in R$. Nyt symmetrian nojalla täytyy olla että $(y,x) \in R$. Eli ollaan saatu: $(x,y) \in R \wedge (y,x) \in R$. Tällöin transitiivisuuden nojalla täytyy olla $(xx) \in R$ ja vielä $(y,y) \in R$. Koska samanlaista päättelyä voidaan soveltaa mv. pareihin relaatiossa relaation täytyy siis olla refleksiivinen.

(b) Muodostetaan haettu relaatio. Koska R piti olla refleksiivinen niin täytyy olla ainakin $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$ Tämä olisi transitiivinenkin, mutta myös symmetrinen. Lisätään siihen siis pareja niin ettemme riko transitiivisuutta mutta rikomme symmetrian. Esimerkiksi:

$$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,3),(1,3)\}$$

kelpaa.

(c) Taas täytyy olla ainakin refleksiivinen, eli aloitetaan taas $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$. Nyt pitäisi lisätä pareja siten että rikomme transitiivisuuden, muttemme symmetriaa. Pienen pohdinnan jälkeen päädymme seuraavaan:

$$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,3),(3,1),(3,4),(4,3)\}$$

Huomaa ettei tämä ole transitiivinen koska siitä puuttuu esim. $(1,4)$.

(d) Tähän sopii triviaalisti esim $R = X \times X$

Olkoot X joukko ja R_1, R_2 sen relaatioita. Määritellään

$$R_1 \circ R_2 = \{(x,y) \in X \times X : \exists z((z,y) \in R_2 \wedge (x,z) \in R_1)\}$$

19. Olkoon $A = \{1,2,3\}$ ja $R_1 = \{(1,2),(2,3)\}$ Muodosta sellainen relaatio R_2 A:lle että $(1,3) \in R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$

Ratkaisu: Kuten yleensä näissä tehtävissä ei tarvitse kommentoida kuinka vastauksiin päädyttiin, vain määrittää jotakin ja osoittaa että se toimii. Asetetaan $R_2 = R_1$. Nyt ainakin ehto $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$ on voimassa. Tämä lisäksi, liitety relaation määritelmän mainitsemaksi z:ksi voidaan valita 2 jolloin nähdään että $(1,3) \in R_1 \circ R_2$