Diskreetin Matematiikan Paja

Ratkaisuehdotuksia viikolle 2. (24.3 - 25.3)

Jeremias Berg

1. Olkoot $A_1 = \{1,2,3\}, A_2 = \{A_1, 5, 6\}, A_3 = \{A_2, A_1, 7\}, D = \{A_1, A_2, A_3\}$ Kirjoita auki seuraavat joukot:

   (a) $\mathcal{P}(A_1) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

   (b) $\mathcal{P}(A_2) = \{\emptyset, \{A_1\}, \{5\}, \{6\}, \{A_1, 5\}, \{A_1, 6\}, \{5,6\}, \{A_1, 5, 6\}\}$

   (c) $\mathcal{P}(D) = \{\emptyset, \{A_1\}, \{A_2\}, \{A_3\}, \{A_1, A_2\}, \{A_1, A_3\}, \{A_2, A_3\}, \{A_1, A_2, A_3\}\}$

   (d) $\bigcup D = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, A_1, A_2\}$

   Huomioitavaa:

   (a) $\{\emptyset\} \neq \emptyset$

   (b) $\{1\} \notin \mathcal{P}(A_2)$ koska silloin olisi $1 \in A_2$.

   (c) $A_1 \in \bigcup D$ koska $A_1 \in A_2$

2. Kirjoita auki seuraavat tulojoukot

   (a) $\{67, 5, 34\} \times \{99, 87\} = \{(67, 99), (67, 87), (5, 99), (5, 87), (34, 99), (34, 87)\}$

   (b) $\{67, 5, 34\} \times \emptyset = \emptyset$

   (c) $\{67, 5, 34\} \times \{\emptyset\} = \{(67, \emptyset), (5, \emptyset), (34, \emptyset)\}$

   (d) $\{a, e, i, o, u\} \times \{d, t\} = \{(a, d), (a, t), (e, d), (e, t), (i, d), (i, t), (o, d), (o, t), (u, d), (u, t)\}$

   Kohdassa 2b tulojoukko on tyhjä koska ei ole olemassa sellaista järjestettyä paria (x, y) että $y \in \emptyset$.

3. Olkoot $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 10\}$ ja $B = \{x \in \mathbb{Z} : |x| < 3\}$

   (a) Mitä silloin on joukossa $A \times B$ entä joukossa $B \times A$.

   (b) Kuinka monta alkiota on joukossa A ja B, entäs $A \times B$.

   (c) Tee hypoteesi edellisen kohdan havainolle ja osoita yleisesti että jos $|A| = m$, $|B| = n$ niin $|B \times A| = |A \times B| = n * m$

   Ratkaisut:

   (a) $A\times B = \{(0,-2),(0,-1),(0,0),(0,1),(0,2),(1,-2),(1,-1),(1,0),(1,1),(1,2)....\}$, $B\times A = \{(-2,0),(-2,1),(-2,2),(-2,3),(-2,4),(-2,5),(-2,6),(-2,7),(-2,8)...\}$

   (b) Joukossa A on 10 alkiota, B:ssä 5 ja joukossa $A \times B$ 50 alkiota.

   (c) Oletetaan siis että $|A| = m$ tutkitaan mv. alkiota $x \in A$. Nyt tämä alkio voi muodostaa n eri paria joukon B alkioiden kanssa. Eli alkio x “tuottaa” n eri paria tulojoukkoon. Koska kaikille eri alkioille $x \in A$ nämä parit ovat erit niin yhteensä tulojoukkoon tulee $n \cdot m$ paria.

4. Todista että kaikille joukoille X, Y ja $A \subset X, B \subset Y$ pätee:

$$\complement(A \times B) = \complement A \times Y \cup X \times \complement B$$

Ratkaisu: Hieman ehkä monimutkaisempi todistustehtävä koska joukoissa on nyt pareja alkioina. Kuitenkin perusidea on edelleen täysin sama. Osoitetaan molemmat joukot toistensa osajoukoiksi. Aloitetaan kirjoittamalla auki muutamat joukot. Kannattaa miettiä miksi nämä pätee:

$$\begin{aligned}
\complement(A \times B) = \{(x,y) \in X \times Y : (x,y) \notin A \times B\} &= \{(x,y) : x \in X \wedge y \in Y \wedge \neg(x \in A \wedge y \in B)\} \\
&= \{(x,y), x \in X \wedge y \in Y \wedge (x \notin A \vee y \notin B)\} \\
\complement A \times Y = \{(x,y) \in X \times Y : x \in \complement A, y \in Y\} &= \{(x,y) : x \in X \wedge y \in Y \wedge x \notin A\} \\
X \times \complement B = \{(x,y) \in X \times Y : x \in X, y \in \complement B\} &= \{(x,y) : x \in X \wedge y \in Y \wedge y \notin B\}
\end{aligned}$$

Tämä on usein kätevä tapa kun aletaan tehdä monimutkaisempia todistuksia. Kannattaa kirjoittaa auki kaikki käsiteltävät joukot ja sen jälkeen alkaa miettiä miksi todistettava väite voisi pitää paikkansa. Tämän jälkeen voidaan sitten alkaa muotoilla formaalia todistusta. Tuttuun tapaan mielivaltainen alkio molemmista joukoista ja osoitetaan että se kuuluu toiseen:

“ $\subset$”

Olkoot $(x,y) \in \complement(A \times B)$ olla mielivaltainen. Nyt aikaisemman perusteella voimme vetää johtopäätöksen:

$$(x,y) \in \complement(A \times B) \Rightarrow x \in X \wedge y \in Y \wedge (x \notin A \vee y \notin B)$$

Tästä saadaan kaksi (kolme, mutta kolmas käsitellään samalla lailla) vaihtoehtoa. $x \in X \wedge y \in Y \wedge x \notin A$ ja $x \in X \wedge y \in Y \wedge y \notin B$. Käsitellään molemmat:

(a) $x \in X \wedge y \in Y \wedge x \notin A \Rightarrow x \in \complement A \wedge y \in Y \Rightarrow (x,y) \in \complement A \times B \Rightarrow (x,y) \in \complement A \times Y \cup X \times \complement B$

(b) $x \in X \wedge y \in Y \wedge y \notin B \Rightarrow x \in X \wedge y \in \complement B \Rightarrow (x,y) \in X \times \complement B \Rightarrow (x,y) \in \complement A \times Y \cup X \times \complement B$

Molemmissa tapauksissa saatiin siis mitä haluttiin. $(x,y) \in \complement A \times Y \cup X \times \complement B$.

" $\supset$"
Otetaan nyt mv. $(x,y) \in \complement A \times Y \cup X \times \complement B$. Saadaan suoraan kaksi vaihtoehtoa:

$$(x,y) \in \complement A \times Y \text{ tai } (x,y) \in X \times \complement B$$

Taas käsitellään:

$$(x,y) \in \complement A \times Y \Rightarrow x \in \complement A \wedge y \in Y \Rightarrow (x,y) \notin A \times B \Rightarrow (x,y) \in \complement(A \times B)$$
$$(x,y) \in X \times \complement B \Rightarrow y \notin B \Rightarrow (x,y) \notin A \times B \Rightarrow (x,y) \in \complement(A \times B)$$

Nyt ollaan osoitettu molemman suunnat ja voidaan vetää johtopäätös:
$\complement(A \times B) = \complement A \times Y \cup X \times \complement B$

5. Piirrä seuraavat järjestetyt parit koordinaatistoon.

   (a) $(3,4)$

   (b) $(4,3)$

   (c) $(1,2)$

   (d) $(2,1)$

   (e) $(-3,-5)$

   (f) $(-2,2)$

   (g) $(2,-2)$

   Päteekö yleisesti $(a,b) = (b,a)$?

6. Materiaali mainitsee että järjestetyille pareille voidaan antaa joukkoopillinen määritelmä $(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$

   (a) Osoita ensiksi että määritelmänä ei toimi $(a,b) = \{\{a\},\{b\}\}$ (Mitä huomasit tehtävässä 5?)

   (b) *Osoita nyt että $(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$ (Ekstensioaksioma auttaa. Tehtävänä on määritelmää apuna käyttäen osoittaa $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$)

   Ratkaisu:

   (a) Jos olisi $(a,b) = \{\{a\},\{b\}\}$ niin olisi $(a,b) = \{\{a\},\{b\}\} = \{\{b\},\{a\}\} = (b,a)$. Kuitenkin, kuten tehtävässä 5 huomattiin. $(a,b) \neq (b,a)$.

(b) Pyydän anteeksi huonoa tehtävän antoa. Tässä pitäisi näyttää että

$$\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\} \Leftrightarrow a = c \land b = d$$

. Lisäksi tässä on oletuksena: $a \neq b \land c \neq d$.

" $\Rightarrow$"

Nyt oletetaan $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$ ja $a \neq b \land c \neq d$. Ensin saadaan extensioaksiomaan nojalla:

$$\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\} \Rightarrow \{a\} = \{c\} \lor \{a\} = \{c,d\}$$

Koska $c \neq d$ niin joukko $\{a\} \neq \{c,d\}$ koska joukossa $\{a\}$ on 1 alkio kun taas joukossa $\{c,d\}$ on kaksi eri alkiota. Jäljelle jää siis:

$$\{a\} = \{c\} \Rightarrow a = c$$

Vastaavasti saadaan:

$$\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\} \Rightarrow \{a,b\} = \{c\} \lor \{a,b\} = \{c,d\}$$

Nyt koska $a \neq b$ niin joukossa $\{a,b\}$ on kaksi eri alkiota. Joukossa $\{c\}$ taas yksi. Taas saadaan siis $\{a,b\} = \{c,d\}$. Saadaan lisää tapauksia:

$$\{a,b\} = \{c,d\} \Rightarrow (a = c \lor a = d) \land (b = c \lor b = d)$$

Tästä voidaan eliminoida vaihtoehtoja seuraavasti. Aikaisemmin ollaan osoitettu että $a = c$ ja koska $c \neq d$ niin voidaan eliminoida $a = d$. Nyt koska $a \neq b$ niin voidaan myös eliminoida $b = c$. Jäljelle jää siis $a = c$ ja $b = d$. Aivan kuten haluttiin.

" $\Leftarrow$"

Nyt oletetaan siis $a = c \land b = d$ ja $a \neq b \land c \neq d$. Tästä seuraa paljon helpommin että:

$$\begin{aligned} a = c &\Rightarrow \{a\} = \{c\} \\ b = d &\Rightarrow \{a,b\} = \{c,d\} \\ &\Rightarrow \{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\} \end{aligned}$$

7. Olkoot $X = \{1,2,3,4....10\}$ Kirjoita auki seuraavat Relaatiot. Piirrä myös nuolikaaviot (sivu 18).

   (a) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in X \times X : x = 2y\} = \{(2,1),(4,2),(6,3),(8,4),(10,5)\}$

   (b) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in X \times X : x = 5 - y\} = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$

   (c) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in X \times X : x = y\}$
   $= \{(1.1),(2.2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(7,7),(8,8),(9,9),(10,10)\}$

(d) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in X \times X : \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{Z}\} = \{(3, 4), (4, 3), (6, 8), (8, 6)\}$

8. Olkoon X joukko $A \subset X, B \subset X$ ja R joukon X relaatio. Osoita seuraavat seikat. (Muista että määrittelemme relaation käsitteen joukkona, eli näissä todistuksissa käytetään samoja tekniikoita kun viime viikolla osittaessamme joukkoja samoiksi).

   (a) $R(A \cup B) = R(A) \cup R(B)$

   (b) $R(A \cap B) \subset R(A) \cap R(B)$ Anna myös esimerkki tapauksesta jossa sisältyminen on aitoa (eli $\exists x\, (x \in R(A) \cap R(B) \wedge x \notin R(A \cap B))$).

Ratkaisu: 8a) Kyse on hieman monimutkaisemmasta joukosta, eli kannattaa aloittaa määritelmästä. Jos $A \subset X$ ja R relaatio joukolle X niin:

$$R(A) = \{y \in X : \exists x \in X : (x, y) \in R\}$$

Eli joukossa $R(A)$ ovat sellaiset maalijoukon (X) alkiot joille löytyy ainakin 1 alkio lähtöjoukosta siten että lähtöjoukon alkio on relaatiossa joukon $R(A)$ alkion kanssa. Huomaa että näitä löytyy siis ainakin yksi, mikään ei estä niitä olemasta enempää. Nyt voimme osoittaa annetun väitteen:

"$\subset$"

Olkoon $y \in R(A \cup B)$ mielivaltainen. Tällöin pätee:

$$y \in R(A \cup B) \Rightarrow \exists x \in A \cup B : (x, y) \in R$$
$$1) x \in A \Rightarrow \exists x \in A : (x, y) \in R \Rightarrow y \in R(A) \Rightarrow y \in R(A) \cup R(B)$$
$$2) x \in B \Rightarrow \exists x \in B : (x, y) \in R \Rightarrow y \in R(B) \Rightarrow y \in R(A) \cup R(B)$$

Huomaa miten tässä määritelmän avulla ensin "hajotettiin" vastaus osiin ja sitten "koottiin" takaisin halutulla tavalla.

"$\supset$"

Olkoon nyt $y \in R(A) \cup R(B)$. Taas saadaan:

$$y \in R(A) \cup R(B) \Rightarrow y \in R(A) \vee y \in R(B)$$
$$1) y \in R(A) \Rightarrow \exists x \in A : (x, y) \in R \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow \exists x \in A \cup B : (x, y) \in R \Rightarrow y \in R(A \cup B)$$
$$2) y \in R(B) \Rightarrow \exists x \in B : (x, y) \in R \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow \exists x \in A \cup B : (x, y) \in R \Rightarrow y \in R(A \cup B)$$

8b) Nyt riittää osoittaa vain "toinen suunta" koska tässä nimittäin ei päde yhtäsuuruus, mikä tullaan esimerkin kautta huomaamaan. Kiinnostunut lukija voi "yrittää" todistaa yhtäpitävyyttä huomatakseen missä kohdassa todistus jumittuu. Tässä kuitenkin tyydytään vain todistamaan tehtävän väite: Olkoon $y \in R(A \cap B)$ mielivatainen:

$$y \in R(A \cap B) \Rightarrow \exists x \in A \cap B : (x, y) \in R \Rightarrow$$
$$1) x \in A \Rightarrow \exists x \in A : (x, y) \in R \Rightarrow y \in R(A)$$
$$2) x \in B \Rightarrow \exists x \in B : (x, y) \in R \Rightarrow y \in R(B)$$
$$\Longrightarrow y \in R(A) \wedge y \in R(B) \Rightarrow y \in R(A) \cap R(B)$$

Joka osoittaa väitteen.

Esimerkki aidosta sisältymisestä: Määritellään $X = \{1,2,3,4\}$, $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ ja $R = \{(1,2),(2,2),(3,4),(4,4)\}$ Nyt huomataan että:

$$\begin{aligned} R(A) &= \{2\} \\ R(B) &= \{2\} \\ R(A \cap B) &= R(\emptyset) = \emptyset \\ R(A) \cap R(B) &= \{2\} \end{aligned}$$

Eli $2 \in R(A) \cap R(B)$ mutta $2 \notin R(A \cap B)$ Eli joukot eivät ole yleisessä tapauksessa samat.

9. Kirjoita auki tehtävän 7 käänteisrelaatiot.

   Ratkaisut

   (a) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in X \times X : x = 2y\}$
   $R^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in R\} = \{(1,2),(2,4),(3,6),(4,8),(5,10)\}$

   (b) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in X \times X : x = 5 - y\}$ $R^{-1} = \{(4,1),(3,2),(2,3),(1,4)\} = R$

   (c) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in X \times X : x = y\}$ $R^{-1} = \{(1.1),(2.2),(3,3),(4,4),(5,5)\} = R$

   (d) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in X \times X : \sqrt{x^2+y^2} \in \mathbb{Z}\}$ $R^{-1} = \{(4,3),(3,4),(8,6),(6,8)\} = R$

10. Olkoot $X = \{1,2,3,4\}$ Mitkä seuraavista relaatioista ($X \times X$ osajoukoista) ovat funktioita, miksi? Miksi ei? (Perustelujen tukena kannattaa käyttää määritelmää joka löytyy sivulta 22)

    (a) $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

    (b) $\{(1,4),(2,3),(2,2),(4,1)\}$

    (c) $\{(2,3),(2,4),(3,4),(4,4)\}$

    (d) $\{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\}$

    Ratkaisut: Tässä tutkitaan relaatioiden ja funktioiden eroja. Funktio on relaatio jolle on asetettu lisävaatimus että jokainen lähtöjoukon alkio on relaatiossa täsmälleen yhden maalijoukon alkion kanssa. Huomaa siis että maalijoukolle ei tässä aseteta vaatimuksia. Yksi maalijoukon alkio voi olla relaatiossa useamman lähtöjoukon alkion kanssa ja koko maalijoukon ei tarvitse olla relaatiossa. Nämä vaatimukset liittyvät injektiivisyyteen ja surjektiivisuuteen joita tutkitaan myöhemmin.

    (a) Relaatio on funktio.

    (b) Relaatio ei ole funktio koska sekä $(2,3) \in R$ ja $(2,2) \in R$.

    (c) Relaatio ei ole funktio koska $(2,3) \in R$ ja $(2,4) \in R$. Toinen syy on se etei lähtöjoukon alkio 1 kuvaudu millekkään alkiolle.

(d) Relaatio on funktio, se että kaikki alkiot lähtöjoukosta kuvautuvat 4:lle ei vaikuta asiaan.

11. Muuta niitä tehtävän 10 relaatioita jotka eivät olleet funktioita jollain sopivalla lailla ”tehdäksesi”niistä funktioita. (Huomaa siis että kaikki funktiot ovat relaatioita, mutta kaikki relaatiot eivät ole funktioita).

    Ratkaisu: Tässä on monta eri oikeaa vastausta. Kunhan ymmärtää funktion käsitteen niin tehtävä ei ole kovinkaan haastava. Relaatioita voi muokata esimerkiksi näin:
    10b $\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$
    10c $\{(1,3),(2,4),(3,4),(4,4)\}$

12. Olkoot X taas kuten tehtävässä 10. Olkoot $f : X \to X, f(x) = x+1$ Onko f kuvaus? entä jos $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$?

    Ratkaisu: Ensimmäisessä tapauksessa huomataan että $f(4)$:n pitäisi saada arvo 5. Mutta koska $5 \notin X$ niin f ei ole edes hyvin määritelty relaatio, eikä myöskään kuvaus. Toisessa tapauksessa tätä ongelmaa ei ole. Jokaiselle luonnoliselle luvulle löytyy “seuraaja” eli yhtä suurempi. Näimpä f on kuvaus. Tällöin f on jopa bijektio.

13. Olkoot $A = \{1, 2\}$

    (a) Muodosta kaikki kuvaukset $f : A \to A$,

        i. $\{(1,2),(2,1)\}$
        ii. $\{(1,1),(2,1)\}$
        iii. $\{(1,2),(2,2)\}$
        iv. $\{(1,1),(2,2\}$

    (b) Anna esimerkki joukon A relaatiosta joka ei ole funktio

        Ratkaisu: esimerkiksi $\emptyset$

14. Olkoon $f : X \to Y$ ja $C, D \subset Y$ Osoita:

    (a) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
    (b) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

    Todistus. Jatketaan määritelmiä. Nyt kyse on joukosta:

    $$f^{-1}(C) = \{x \in X : f(x) \in C\}$$

    Eli ne lähtöjoukon alkiot joiden “kuva” on joukossa C. Joukkoa nimitetään joukon C alkukuvaksi.

    HUOM! Tässä on tärkeä huomata kuinka merkintää $f(x)$ saa ja ei saa käyttää. Koska kyse on funktiosta voimme sanoa että jokaiselle lähtöjoukon (X) alkiolle varmasti löytyy jokin alkio maalijoukosta johon se kuvautuu. Tiedämme myös että se alkio on yksikäsitteinen. Näinpä tässä tapauksessa merkintä $f(x)$ tarkoittaa varmasti jotain ja voi tarkoittaa vain yhtä alkiota maalijoukossa ja sen käyttö on oikeutettua.

Huomaa ero esim. merkintään $f^{-1}(y)$ jollekin maalijoukon alkiolle. Koska emme tiedä onko funktio bijektio emme myöskään tiedä onko kaikille maalijoukon alkioille edes olemassa sellaista lähtöjoukon alkiota joka kuvautuisi maalijoukoon juuri tälle alkiolle. Näitä alkioita voi myös olla enemmän kuin yksi. Eli merkintä $f^{-1}(y)$ voi potentiaalisesti olla tarkoittamatta mitään, tai tarkoittaa montaa eri asiaa. Tälläisiä merkintöjä ei matematiikassa käytetä.

14a)
Määritelmien avulla tämä ei eroa kovinkaan paljon jo tehdystä tehtävästä 8a, ja 8b:
"$\subset$"
Olkoon $x \in f^{-1}(C \cup D)$ mielivaltainen. Tästä saadaan:

$$x \in f^{-1}(C \cup D) \Rightarrow f(x) \in C \cup D$$
$$\begin{cases} f(x) \in C \Rightarrow x \in f^{-1}(C) \Rightarrow x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \\ f(x) \in D \Rightarrow x \in f^{-1}(D) \Rightarrow f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \end{cases}$$

Joka osoittaa väitteen tämän suunnan.

"$\supset$"
Olkoot nyt $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ mielivaltainen. Tästä seuraa:

$$x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \Rightarrow x \in f^{-1}(C) \vee x \in f^{-1}(D)$$
$$\begin{cases} x \in f^{-1}(C) \Rightarrow f(x) \in C \Rightarrow f(x) \in C \cup D \\ x \in f^{-1}(D) \Rightarrow f(x) \in D \Rightarrow f(x) \in C \cup D \end{cases}$$

Eli tämäkin suunta johti haluttuun tulokseen ja väite pitää siis paikkansa.

14b)
Nyt pitäisi siis osoittaa $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$. Tämä on tapauksena sen verran yksinkertainen että sen voi tehdä ekvivalensseilla, eikä siis erikseen eri suuntiin. Jos argumentin aikana jossain vaiheessa saadaan eri tapauksia on yleensä helpompi todistaa molemman suunnat erikseen, mutta näin ei tässä tapauksessa tule käymään.

Olkoon $x \in f^{-1}(C \cap D)$. Nyt pätee:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(C \cap D) &\Leftrightarrow f(x) \in C \cap D \Leftrightarrow f(x) \in C \wedge f(x) \in D \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(C) \wedge x \in f^{-1}(D) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \end{aligned}$$

Eli väite pitää paikkansa. $\square$

15. Mitkä seuraavista kuvauksista ovat, injektioita? surjektioita? bijektioita? Mikäli kuvaukset ovat bijektoita määrittele käänteiskuvaus. Pyri taas perustelemaan määritelmien avulla.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = |x|$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x^2 + 4$

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x^3 + 6$

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = |x| + x$

(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x(x-2)(x+2)$

Ratkaisut: Sitten aletaan tutkia funktioiden erikoistapauksia. Injektioita: jolloin jokaiselle maalijoukon alkioille löytyy korkeintaan 1 alkio lähtöjoukosta jonka kuva se on. Surjektioita: jolloin jokaiselle alkiolle maalijoukosta löytyy ainakin 1. Sekä bijektioita: jolloin löytyy täsmälleen 1. Eli bijektiiviset funktiot ovat sekä injektioita että surjektioita.

(a) Kuvaus ei ole injektio koska $f(-1) = f(1) = 1$ eli -1 ja 1 kuvautuvat samalle alkiolle maalijoukossa. Kuvaus ei myöskään ole surjektio koska lähtöjoukossa ei ole alkiota joka kuvautuisi -1:lle.

(b) Kuvaus ei ole injektio koska $f(1) = 5 = f(-1)$. Kuvaus ei ole surjektio koska lähtöjoukosta ei löydy alkiota joka kuvautuisi esim. arvolle 2.

(c) Nyt kuvaus on injektio. Tämä osoitetaan näyttämällä että jos kaksi mv. alkiota x_1 ja x_2 kuvautuvat samalle alkiolle niin silloin $x_1 = x_2$. Tässä oletetaan tunnetuksi että kaikille reaaliluvuille kuutiojuuri on yksikäsitteinen. Eli oletetaan nyt $f(x_1) = f(x_2)$ joillekin mv. alkioille lähtöjoukosta. Tällöin pätee:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ x_1^3 + 6 &= x_2^3 + 6 \\ x_1^3 &= x_2^3 \\ \sqrt[3]{x_1^3} &= \sqrt[3]{x_2^3} \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Kuvaus on myös surjektio. Tämä taas osoitetaan ottamalla mv. reaaliluku y maalijoukosta. Taas koska kaikilla luvuilla on olemassa kuutiojuuri ja luku $y - 6$ on realiluku niin lähtöjoukosta voimme valita luvun $x = \sqrt[3]{y-6}$. Kun nyt tutkitaan $f(x)$:ää niin huomataan että:

$$f(x) = f(\sqrt[3]{y-6}) = \left(\sqrt[3]{y-6}\right)^3 + 6 = y - 6 + 6 = y$$

Eli mielivaltaiselle alkiolle maalijoukosta löydettiin alkio lähtöjoukosta jonka kuva y on. Tämä osoittaa että kuvaus on surjektio.

Nyt kuvaus oli siis injektio ja surjektio, eli se on myös bijektio. Eli pitäisi löytää käänteiskuvaus. Etsitään siis sellaista kuvausta $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jolle olisi voimassa että $g \circ f(x) = g(f(x)) = x$ ja $f \circ g(x) = f(g(x)) = x$. Matematiikassa harvemmin tarvitsee kommentoida tälläisissä tehtävissä miten johonkin tiettyyn funtioon päästään. Vain suoraan sanoa että $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : g(x) = \sqrt[3]{x-6}$ toimii ja sitten osoittaa se. (Surjektiivisuuden todistuksesta saa usein hyvän kuvan siitä mikä voisi olla käänteiskuvaus. Osoitetaan vielä että g on toimiva käänteiskuvaus:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^3+6) = \sqrt[3]{x^3+6-6} = \sqrt[3]{x^3} = x$$
$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x-6}) = \left(\sqrt[3]{x-6}\right)^3 + 6 = x - 6 + 6 = x$$

(d)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = |x| + x = \begin{cases} -x + x = 0 & x < 0 \\ x + x = 2x & x > 0 \end{cases}$$

Tästä nähdään melkeinpä suoraan ettei funktio ole injektio eikä surjektio. Mitkä tahansa kaksi negatiivista luku kuvautuvat samalle alkiolle ja mikään luku ei kuvaudu negatiiviseksi.

(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x(x-2)(x+2)$ Kuvaus ei ole injektio koska esim $f(0) = f(2) = f(-2) = 0$. Kuvaus on surjektio, tämä tosin on käyttämällämme tekniikalla hieman hankala osoittaa. Koska kuvaus ei ollut injektio niin maalijoukon kaikille alkioille on hankala muodostaa explisiittistä alkiota lähtöjoukosta. Myöhemmillä kursseilla todistetaan että tälläiset reaaliarvoiset polynomit ovat aina surjektioita.

16. Olkoon $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ kuvaus. Onko f bijektio kun:

(a) $f(x) = x$

(b) $f(x) = x^2$

(c) $f(x) = 3x$

(d) $f(x) = \begin{cases} x-1, x < 0, \\ x, x \geq 0 \end{cases}$

Ratkaisut: Jatketaan samalla linjalla. Tosin tässä pitää olla tarkkana määrittelyjoukkojen kanssa. Jotkut vastaukset pohjautuivat väitteisiin kuten "Ei ole alkiota joka kuvautuisi alkiolle $\frac{1}{9}$" tämä ei vielä hirveästi haittaa koska $\frac{1}{9} \notin \mathbb{Z}$.

(a) Kuvaus on triviaalisti bijektio.

(b) Kuvaus ei ole injektio $f(-2) = f(2)$ eli ei myöskään bijektio.

(c) Nyt kuvaus on injektio muttei surjektio. Surjektivisuuden vastaesimerkiksi kelpaa todeta ettei kokonaisluvuissa ole alkiota joka kuvautuisi alkiolle 2. Osoitetaan vielä injektiivisyys harjoituksen vuoksi:

Otetaan 2 mv. alkiota x_1, x_2 lähtöjoukosta ja oletetaan $f(x_1) = f(x_2)$. Osoitetaan nyt että näillä oletuksilla täytyy olla $x_1 = x_2$.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \Rightarrow \frac{3x_1}{3} = \frac{3x_2}{3} \Rightarrow x_1 = x_2$$

(d) Kuvaus on injektio, muttei surjektio. Injektiivisyys osoitetaan aivan kuten yllä. Surjektiivisuuden vastaesimerkiksi pitää valita -1. Lähtöjoukosta nimittäin ei löydy alkiota joka kuvautuisi sille. $(f(-1) = -2, f(0) = 0)$. Vielä pitää todeta että jos $x < -1$ niin $f(x) < -2$ ja jos $x > 0$ niin $f(x) > 0$.

17. Olkoon $f : A \to B$ surjektio.

(a) Osoita että
$$f(f^{-1}(Y)) = Y \,\forall Y \subset B$$

(b) Osoita että
$$f^{-1}(f(X)) = X \,\forall X \subset A \Leftrightarrow f \text{ on injektio}$$

(c) *Osaatko osoittaa edellisen kohdan $\Rightarrow$ suunnan kahdella ”eri tavalla”.

Todistus. Vaikka tässä ehkä tuntuu että tehtävät muuttuvat, niin perusidea on edelleen aivan täysin sama. Käytetään annettuja oletuksia ja osoitetaan kaksi joukkoa samoiksi. Tai osoitetaan implikaatioita molempiin suuntiin.

(a) “$\subset$”
Olkoon $Y \subset B$ jokin mielivaltainen osajoukko. Valitaan siitä joukosta mv. alkio y. Nyt koska f oli surjektio voimme varmuudella sanoa että $\exists x_0 \in A : f(x_0) = y$. Nyt saadaan:

$$y = f(x_0) \in Y \Rightarrow x_0 \in f^{-1}(Y) \Rightarrow \exists x_0 \in f^{-1}(Y) : (x, y) \in f \Rightarrow y \in f(f^{-1}(Y))$$

Mieti tarkkaan missä kohtaa tässä tarvittiin surjektiivisuus oletusta ja mitä ei olisi saanut sanoa tietämättä funktiota surjektioksi. Ihan formaalisti tässä pitäisi käsitellä tapaus $Y = \emptyset$ erikseen. Mutta tämä on aika triviaali, eli jätetään lukijalle
“$\supset$” Olkoot taas $Y \subset B$ ja $y \in f(f^{-1}(Y))$ mielivaltaisia. Nyt saadaan määritelmien avulla:

$$\begin{aligned} y \in f(f^{-1}(Y)) \Rightarrow \exists x_0 \in f^{-1}(Y) : f(x_0) = y \Rightarrow \\ x_0 \in f^{-1}(Y) \Rightarrow f(x_0) \in Y \Rightarrow y \in Y \end{aligned}$$

Tässä oltaisiin pärjätty ilman surjektiivisuuttakin.

(b) Nyt vuorossa on sitten näyttää ekvivalenssi. Tehtäviä ei kannata pelästyä, perustekniikka suurimman osan ajasta sama. Kannattaa vaikka kirjoittaa paperille annetut oletukset ja alkaa miettiä miten näillä parhaiten pääsisi osoitettavaan asiaan.

"$\Rightarrow$"

Nyt siis oletetaan $f^{-1}(f(X)) = X \forall X \subset A$ ja edelleen että f on surjektio. Nyt pitäisi saada näytettyä että f on injektio. Tässä vaiheessa kannattaa varmaan käyttää samoja tekniikkoja kun silloin kun osoitettiin funktioita injektioiksi. Eli otetaan kaksi mv, alkiota $x_1, x_2 \in A$ oletetaan että $f(x_1) = f(x_2)$. Nyt jos osoitetaan että silloin täytyy olla $x_1 = x_2$ niin ollaan osoitettu kuvaus injektioksi.

Nyt koska $x_1 \in A$ niin $\{x_1\} \subset A$. Merkataan $X_1 = \{x_1\}$. Samalla lailla $X_2 = \{x_2\}$. Nyt ollaan taas menty askel eteenpäin. Koska molemmissa joukoissa on 1 alkio niin jos voidaan osoittaa että $X_1 = X_2$ niin ekstensioaksiooman nojalla silloin $x_1 = x_2$. Syy minkä takia tämä askel kannatti tehdä on että saamamme oletukset käsittelevät joukkoja eikä yksittäisiä alkioita.

Nyt pätee:

$$x_1 \in X_1 \Rightarrow f(x_1) \in f(X_1)$$
$$x_2 \in X_2 \Rightarrow f(x_2) \in f(X_2)$$

Toisaalta koska kyseessä on funktio niin tiedetään että joukossa $f(X_1)$ ei voi olla mitään muuta kuin $f(x_1)$ koska silloin alkion x_1 pitäisi kuvautua useammalle eri alkiolle. Eli $f(X_1) = \{f(x_1)\}$. Vastaavasti $f(X_2) = \{f(x_2)\}$. Nyt koska $f(x_1) = f(x_2)$ niin täytyy olla $f(X_1) = f(X_2)$ Tästä saadaan myös että joukkojen $f(X_1)$ ja $f(X_2)$ alkukuvat ovat samat, jokaisella maalijoukon alijoukolla on yksikäsitteinen alkukuva. Nyt ollaan siis saatu: $f^{-1}(f(X_1)) = f^{-1}f(X_2)$. Nyt käytetään vielä viimeistä "asettamme". Nimittäin oletusta että $f^{-1}(f(X)) = X : \forall X \subset A$. Koska $X_1, X_2 \subset A$ voimme tiivistää kaiken tämän pohdinnan seuraavaan:

$$X_1 = f^{-1}(f(X_1)) = f^{-1}f(X_2) = X_2 \Rightarrow \{x_1\} = \{x_2\} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Joka osoittaa sen mitä piti.

"$\Leftarrow$"

Nyt siis oletuksena f:n injektiivisyys ja surjektiivisuus ja pitäisi osoittaa $f^{-1}(f(X)) = X \forall X \subset A$. Tämä voidaan tehdä "pitkän kaavan" mukaan, mutta on olemassa helpompikin tapa. Koska f oli injektio ja surjektio niin f on myös bijektio. Ja sillä on käänteiskuvaus. Merkataan $g = f^{-1}$. Se miksi tämä on niin kiinnostavaa on että nyt $g : B \to A$ on surjektio. Eli meillä on surjektio joukolta B joukolle A. Nyt vedotaan tehtävän a) kohtaan. Tästä nimittäin seuraa suoraan ett $f(f^{-1}(Y)) = Y \forall Y \subset A$ (Huomaa että ensimmäinen kohta käsitteli maalijoukkoja, joka g:n tapauksessa on A). Eli väite on osoitettu.

(c) Tämän tehtävän oli tarkoitus myös tutustuttaa todistekniikkoihin. Todistetaan

$$f^{-1}(f(X)) = X \,\forall X \subset A \Rightarrow f \text{ on injektio}$$

uudestaan vastaoletuksella. Eli oletetaan että f ei ole injektio ja johdetaan ristiriita.

Koska f ei ole injektio on siis olemassa kaksi alkiota $x_1 \neq x_2,\ x_1, x_2 \in A$ siten että $f(x_1) = f(x_2)$. Määritellään nyt $Y = \{x_1, x_2\} \subset A$ ja $Z = \{x_1\} \subset A$. Koska $x_1 \neq x_2$ niin $Y \neq Z$. Kuitenkin pätee (huomaa missä käytetään oletuksia):

$$\begin{aligned} f(Y) = \{f(x_1), f(x_2)\} = \{f(x_1)\} \Rightarrow Y = f^{-1}f(Y) = \\ \{x \in A : f(x) \in f(Y)\} = \{x \in A : f(x) = f(x_1)\} \\ f(Z) = \{f(x_1)\} = \{f(x_1)\} \Rightarrow Z = f^{-1}f(Z) = \\ \{x \in A : f(x) \in f(Z)\} = \{x \in A : f(x) = f(x_1)\} \end{aligned}$$

Eli

$$\begin{aligned} Y = f^{-1}f(Y) = \{x \in A : f(x) \in f(Y)\} = \{x \in A : f(x) = f(x_1)\} = \\ \{x \in A : f(x) \in f(Z)\} = f^{-1}f(Z) = Z \end{aligned}$$

Joka on ristiriita, eli vastaväite pitää hylätä.

$\square$

18. Olkoot A ja B joukkoja joissa A:ssa n alkiota ja B:ssa m (TS. $|A| = n, |B| = m$) ja $f : A \to B,\ g : B \to A$ kuvauksia.

 (a) Jos $n < m$ niin mitä johtopäätöksiä liittyen injektiivisyyteen ja surjektiivisuuteen voit sanoa f:stä ja g:stä.

 (b) Oletetaan nyt että $n = m$. Osoita että

$$f \text{ on injektiivinen } \Leftrightarrow f \text{ on surjektiivinen}$$

Ratkaisut :

(a) Jos joukossa A on "vähemmän" alkioita kuin B:ssä niin mikään kuvaus $A \to B$ ei voi kuvata jokaiselle B:alkiolle jotain. Lähtöjoukosta saa nimittäin kuvata jokaisen alkion vain yhdelle alkiolle maalijoukosta. Eli A:n alkiot loppuvat kesken ennen kun ollaan kuvattu jotain kaikille B:n alkioille. f ei siis voi olla surjektio. Injektiivisyydestä ei voida sanoa.

Kuvauksen g kohdalla taas asia on toisin päin. Koska joukossa B on enemmän alkioita ei mikään kuvaus voi kuvata jokaista B:n alkiota eri A:n alkioille. Ne loppuvat samalla lailla kesken. Eli g ei voi olla injektio, surjektiivisuudesta ei voi sanoa.

(b) "$\Rightarrow$" Oletetaan nyt että f on injektiivinen. Osoitetaan f surjetiiviseksi vastaväitteellä. Eli oletetaan että $\exists b \in B : \nexists a \in A : f(a) = b$. Nyt koska A:ssa ja B:ssa on yhtä monta alkiota ja f on kuvaus jonka on pakko kuvata jokainen A:n alkio jonnekin täytyy siis olla olemassa jokin toinen $b_0 \in B$ jolle kuvautuu useampi kuin yksi alkio A:sta. Tämä on ristiriidassa sen kanssa että f olisi injektio. Eli vastaoletus oli väärä ja f on siis surjektiivinen.

"$\Leftarrow$" Oletetaan nyt sitten että f on surjektiivinen. Nyt argumentti on aika sama kuin toiseen suuntaan. Oletetaan ettei f ole injektiivinen. Eli täytyy löytyä kaksi alkiota A:sta jotka kuvautuvat samalle alkiolle B:ssä. Nyt jos A:sta poistetaan nämä kaksi (tai useampi jos niitä on) ja B:stä niiden kuva niin A:han jää jäljelle maksimissaan $n - 2$ alkiota kun B:hen $m - 1 = n - 1$. Eli B:ssä on enemmän jo koska f edelleen on kuvaus $A \to B$ niin a) kohdan pohditojen perusteella f ei voi olla surjektio. Joka on ristiriita.

Huom! Tähtitehtäviin en tällä viikolla ehdi kirjoittamaan vastauksia. Mikäli vastaukset näihin kiinnostaa niin käsittelen mielelläni pajassa tai ihan vaikka käytävillä niitä.

19. *Olkoot X joukko ja R_1, R_2 sen relaatioita. Määritellään

$$R_1 \circ R_2 = \{(x, y) \in X \times X : \exists z((z, y) \in R_2 \wedge (x, z) \in R_1)\}$$

Olkoon nyt X joukko R sen relaatio. Osoita että

$$R \circ R \subset R \Rightarrow R \text{ on transitiivinen}$$

20. *Sitten lopuksi vähän enemmän relaatioista. Varsinkin joukkoopissa relaatiot ovat joskus melkeimpä tärkeämpiä kuin funktiot. olkoot X joukko ja R joukon relaatio. Sanomme että R on ekvivalenssirelaatio jos kaikille $a, b, c \in X$ pätee:

(a) $(a, a) \in R$, sanomme että relaatio on *refleksiivinen*

(b) $(a, b) \Rightarrow (b, a) \in R$ sanomme että relaatio on *symmetrinen*

(c) $(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$ sanomme että relaatio on *transitiivinen*

Olkoot nyt $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ja $R = \{((a, b), (c, d)) \in X \times X : a + d = b + c \quad a, b, c, d \in \mathbb{N}\}$ Osoita että R on ekvivalenssirelaatio. (Huomaa siis että R on relaatio joukolle $\mathbb{N}^4$ eli jokainen R:n alkio "koostuu"4:stä luonnollisesta luvusta