Diskreetin Matematiikan Paja
Ratkaisuhahmotelmia viikko 1. (14.3 - 18.3)
Jeremias Berg

1. Luettele kaikki seuraavien joukkojen alkiot:

   (a) $\{x \in \mathbb{Z} : |x| \leq 3\}$

   (b) $\{x \in \mathbb{N} : x > 12 \wedge x < 7\}$

   (c) $\{x \in \mathbb{N} : -1 \leq x \leq 7\}$

   Ratkaisu: Joukossa on alkiot $\{x \in \mathbb{Z} : |x| \leq 3\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

   $\{x \in \mathbb{N} : x > 12 \wedge x < 7\} = \emptyset$ Joukon ehdon mukaan siihen kuuluvat kaikki luonnolliset luvut x jotka ovat pienempiä kuin 7 **ja** suurempia kuin 12, (ehtojen täytyisi olla samaan aikaan voimassa samalle alkiolle). Tälläisiä lukuja ei luonnollisista luvuista löydy, eli joukko on tyhjä.

   $\{x \in \mathbb{N} : -1 \leq x \leq 7\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

2. Mitkä seuraavista joukoista ovat samat? Miksi? Miksi ei? (yritä perustella vastauksiasi käyttäen extensioaksiomaa (kussimoniste sivu 2))

   (a) $\{2, 3, 4, 5\}$ ja $\{3, 2, 2, 4, 5\}$

   Ratkaisu: Joukot ovat samat koska emme voi valita kummastakaan joukosta sellaista alkiota joka ei olisi toisessa.

   (b) $\{2, 3, 4, 5\}$ ja $\{2, 2, 3, 4, 5, 6\}$

   Ratkaisu: Joukot eivät ole samat koska 6 on mukana oikeassa joukossa mutta ei vasemmassa

   (c) $\{x \in \mathbb{Z} : |x| \leq 3\}$ ja $\{x \in \mathbb{Q} : |x| \leq 3\}$

   Ratkaisu: Joukot eivät ole samat koska $\frac{1}{2}$ on mukana oikeassa, mutta ei vasemmassa.

   (d) $\{x \in \mathbb{Z} : |x| \leq 3\}$ ja $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 \leq 9\}$

   Ratkaisu: Jos x on vasemassa joukossa niin $|x| \leq 3 \Rightarrow |x|^2 \leq 3^2 = 9 \Rightarrow x^2 \leq 9$ Tämä pätee koska itseisarvo on positiivinen, eli sillä kertominen ei käännä epäyhtälöä. Toisaalta joku luku korotettuna toiseen potenssiin on myös aina positiivinen, eli itseisarvon saa poistaa. Saatiin siis että x on vasemman joukon jäsen $\Rightarrow$ x on oikean joukon jäsen.

   Toisaalta jos x on oikeassa joukkossa niin $x^2 \leq 9 \Rightarrow \sqrt{x^2} \leq \sqrt{9} = 3$ Tämä sattuu olemaan itseisarvon tarkka määritelmä ($|x| = \sqrt{x^2}$) Eli $\sqrt{x^2} \leq 3 \Rightarrow |x| \leq 3$. Tähän riitti muukin perustelu.

   Saatiin siis taas että molemissa joukoissa on täsmälleen samat alkiot. Joukot ovat siis samat.

(e) $\{x \in \mathbb{N} : x^2 - 3x + 2 = 0\}$ ja $\{0, 1, 2\}$

Ratkaisu: Tässäkin oli monta tapaa osoittaa että joukot eivät ole samat. Omasta mielestäni ovelimpiin kuului vedota siihen että vasemmanpuoleisessa joukossa on korkeintaan 2 eri alkiota (toisen asteen yhtälö) kun taas oikeassa on täsmälleen 3. Eli joukot ovat eri. (Huomaa että ratkaisematta yhtälöä emme voi sanoa että siellä on täsmälleen 2 alkiota, vain että siellä on korkeintaan 2)

3. Olkoot $A = \{0, \{1\}, \emptyset, \{2, 3\}\}$ Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa? Taas pitäisi, (ainakin siellä missä se on mielekästä) perustella...

(a) $\emptyset \subset A$

Ratkaisu: Pätee koska tyhjä joukko on kaikkien joukkojen osajoukko. Tämä nähdään esim osajoukon määritelmästä $(x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow A \subset B$. Jos $A = \emptyset$ niin vasemmanpuoleinen implikaatio toteutuu triviaalisti koska $x \in \emptyset$ on aina epätosi

(b) $\emptyset \in A$

Ratkaisu: Pätee, tyhjä joukko on myös A:n alkio tässä tapauksessa

(c) $1 \subset A$

Ratkaisu: Ei päde, käyttämässämme joukko opissa ykkönen ei ole joukko, eikä sillä ole alkioita.

(d) $\{1\} \in A$

Ratkaisu: Pätee, $\{1\}$ on A:n alkio.

(e) $\{1\} \subset A$

Ratkaisu: Ei päde. Jos $\{1\}$ olisi A:n osajoukko niin pitäisi olla $1 \in A$. Näin ei kuitenkaan ole $(1 \neq \{1\})$

(f) $\{\{1\}\} \subset A$

Ratkaisu: Pätee koska kaikki $\{\{1\}\}$:n alkiot (eli siis $\{1\}$) ovat A:n alkioita.

4. Osoita että kaikille joukoille A ja B pätee että $((A \subset B \wedge B \subset A)) \Rightarrow A = B$ (Voit esim annetusta oletuksista johtaa ekstensioaksiooman)

Ratkaisu: Nyt harjoitellaan vielä tässä vaiheessa ehkä turhauttavalta tuntuvaa yliopistotason matematiikan vaatimaa tarkkuutta. Oletuksena on siis $((A \subset B \wedge B \subset A))$ ja Ekstensioaksioma. Tästä pitää päästä $A = B$:n. Kannattaa lukea tarkasti kaikki kohdat ja miettiä miksi kaikkia tarvitaan.

Olkoon $x \in A$ mielivaltainen nyt

$$(x \in A) \wedge (A \subset B) \Rightarrow x \in B$$

Koska x oli mielivaltainen saadaan siis

$$\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Vastaavalla tavalla valitaan mielivaltainen $y \in B$ ja saadaan

$$(y \in B \wedge B \subset A) \Rightarrow y \in A$$

Ja taas y oli mielivaltainen ja sidottu, voimme vaihtaa ja kutsua sitäkin x:ksi. Saimme siis

$$\forall x(x \in B \Rightarrow x \in A)$$

Yhdistämällä saadaan

$$\forall x((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)) \Rightarrow \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Nyt tämä on ekstensioaksioma ja voidaan vetää johtopäätös $A = B$

HUOM! Tässä on nyt liioiteltu hieman tarkkuutta. Ei tätä näin tarkasti olisi tarvinnut tehdä, mutta tarkkojen todistusten läpilukemisessakin on se hyöty että saa hyvää tuntumaa matemattisiin todistuksiin.

5. Osoita myös toinen suunta eli $((A \subset B \wedge B \subset A)) \Leftarrow A = B$.

   Ratkaisu: Tämä on itseasiassa helpompaa. Koska triviaalisti kaikille joukoille $A \subset A$ niin oletuksella $A = B$ saadaan

   $$(A \subset A) \wedge (A = B) \Rightarrow A \subset B$$

   ja

   $$(A \subset A) \wedge (A = B) \Rightarrow B \subset A$$

6. Tarkastellaan joukkoja $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 7, 9\}$ ja $C = \{2, 5, 7\}$. Määritä joukot

   (a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 7, 9\}$, $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ ja $B \cup C = \{2, 3, 5, 7, 9\}$

   (b) $A \cap B = \{3\}$, $A \cap C = \emptyset$ ja $B \cap C = \{2, 7\}$

   (c) $A \cup \emptyset = A = \{1, 3, 4\}$ ja $A \cap \emptyset = \emptyset$

   (d) $A \backslash B = \{1, 4\}$, $B \backslash A = \{2, 7, 9\}$, $A \backslash C = \{1, 3, 4\}$ ja $C \backslash B = \{5\}$.
   Huomaa erityisesti että $\emptyset \notin (A \cup \emptyset)$ koska $\emptyset \notin \emptyset$ ja $\emptyset \notin A$

7. Piirrä Vennin kaavio joka havainnollistaa seuraavia joukkoja (luentomateriaali sivu 9):

   (a) $A \cup B$

   (b) $B \cup A$

   (c) $A \cap (B \cup C)$

   (d) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

   Ratkaisu: Katso kaaviot eri tiedostosta

8. Vaikka vennin kaavio onkin yleensä kätevä apuväline joukkojen käsittelyyn se ei kuitenkaan ole matemaattinen todistus. Todista tehtävän 7 viimeinen havainto matemaatisesti. Ts. osoita että kaikille joukoille A, B, C on voimassa

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Ratkaisu: Käytetään aikaisemmin osoittamaamme tekniikkaa ja osoitetaan että yhtäsuuruus merkin molemmilla puolilla olevat joukot ovat toistensa osajoukkoja. Osajoukon määritelmän nojalla riittää ottaa kummastakin mielivaltainen alkio ja osoittaa että se kuuluu myös toiseen:

"$\subset$"

Olkoon $x \in A \cap (B \cup C)$ mv. alkio. Nyt pätee:

$$x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup C) \Rightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$$

Nyt viimeinen osa jakautuu eri tapauksiin. Joko $x \in B \wedge x \in C$ tai $x \in B \wedge x \notin C$ tai $x \notin B \wedge x \in C$. Näistä pitää käsitellä kaikki tapaukset erikseen. Ensimmäinen:

$(x \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \in C) \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Toinen tapaus menee ihan samalla lailla ja kolmas on:

$(x \in A) \wedge (x \notin B) \wedge (x \in C) \Rightarrow x \in A \wedge x \in C \Rightarrow x \in A \cap C \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Kaikkissa tapauksissa ollaan osoitettu

$$x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Eli $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$

"$\supset$"

Nyt tehdään sama toisin päin: Osoitetaan $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$. Tekniikka on sama, otetaan mielivaltainen alkio vasemmasta joukosta ja osoitetaan että se kuuluu oikeaan.

Olkoot siis $y \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ mielivaltainen. Nyt pätee

$$y \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow y \in (A \cap B) \vee y \in (A \cap C)$$

Taas 2 tapausta $y \in (A \cap B)$ tai $y \in (A \cap C)$ Käsitellään ja katsotaan minne päästään: Ensin:

$$y \in (A \cap B) \Rightarrow y \in A \wedge y \in B \Rightarrow y \in A \wedge y \in B \cup C \Rightarrow y \in (A \cap (B \cup C))$$

Nyt sovellan mallivastausten kirjoittajan suosimaa tapaa ja sanon vain että toinen tapaus on käytännössä täysin sama. Eli se sivuutetaan ja ollaan saatu

$$y \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow y \in A \cap (B \cup C)$$

eli $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$

Nyt voidaan vedota aikaisempiin tuloksiin ja sanoa $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$

9. Piirrä vennin kaavio siitä de Morganin laista jota ei todistettu muistiinpanoissa, eli

$$A\setminus(B\cap C) = (A\setminus B)\cup(A\setminus C)$$

Ratkaisu: Kaaviot eri tiedostossa

10. Todista edellinen laki matemaattisesti.

Ratkaisu: Nyt jo totuttuun tyyliin pitäisi taas osoittaa kaksi joukkoa samoiksi. Sovelletaan samaa tyyliä ja osoitetaan joukot toistensa osajoukoiksi.

"$\subset$"
Eli pitäisi osoittaa

$$A\setminus(B\cap C) \subset (A\setminus B)\cup(A\setminus C)$$

valitaan taas mv. $x \in A\setminus(B\cap C)$ Nyt saadaan:

$$x \in A\setminus(B\cap C) \Rightarrow x \in A \wedge (x \notin B\cap C) \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \vee x \notin C$$

Tästä saadaan taas muutama eri vaihtoehto:

$$x \notin B \wedge x \in C$$

$$x \in B \wedge x \notin C$$

ja

$$x \notin B \wedge x \notin C$$

Näistä viimeinen voidaan käsitellä aivan samalla lailla kuin kumpi vain muista. Eli käsitellään vain kaksi ensimmäistä. Ensimmäisestä saamme:

$$x \in A \wedge x \notin B \wedge x \in C \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A\setminus B \Rightarrow$$
$$x \in (A\setminus B)\cup(A\setminus C)$$

Ja toisesta

$$x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C \Rightarrow x \in A \wedge x \notin C \Rightarrow x \in A\setminus C \Rightarrow$$
$$x \in (A\setminus B)\cup(A\setminus C)$$

Molemmissa tapauksissa saatiin siis

$$x \in A\setminus(B\cap C) \Rightarrow x \in (A\setminus B)\cup(A\setminus C)$$

Ja ollaan osoitettu $A\setminus(B\cap C) \subset (A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

"$\supset$"
Nyt valitaan mv. $x \in (A\setminus B)\cup(A\setminus C)$ Saadaan:

$$x \in (A\setminus B)\cup(A\setminus C) \Rightarrow x \in (A\setminus B) \vee x \in (A\setminus C)$$

Eli taas kaksi eri tapausta $x \in (A \backslash B)$ tai $x \in (A \backslash C)$. Käsitellään molemmat:

$$x \in (A \backslash B) \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A \wedge x \notin (B \cap C) \Rightarrow \\ x \in (A \backslash (B \cap C))$$

Ja toinen:

$$x \in (A \backslash C) \Rightarrow x \in A \wedge x \notin C \Rightarrow x \in A \wedge x \notin (B \cap C) \Rightarrow \\ x \in (A \backslash (B \cap C))$$

Molemmissa tapauksissa saatiin siis

$$x \in (A \backslash B) \cup (A \backslash C) \Rightarrow x \in (A \backslash (B \cap C))$$

Eli $(A \backslash B) \cup (A \backslash C) \subset (A \backslash (B \cap C))$ Nyt ollaan osoitettu molemmat toistensa osajoukoiksi ja voidaan vetää johtopäätös:

$$(A \backslash B) \cup (A \backslash C) = (A \backslash (B \cap C))$$

11. Onko kaikilla joukoilla A, B, C voimassa $A \cup (B \backslash C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$?

    Ratkaisu: Matematiikassa yleensä on aika paljon helpompi osoittaa että jokin ei pidä paikkaansa kuin että se pitää. Saadaan nimittäin itse antaa esimerkki siitä koska se ei päde.

    Olkoot: $A = B = C = \{1\}$ Nyt

    $$A \cup (B \backslash C) = A \cup (A \backslash A) = A \cup \emptyset = A = \{1\}$$

    Mutta
    $$(A \cup B) \setminus (A \cup C) = (A \cup A) \setminus (A \cup A) = A \backslash A = \emptyset$$

    Ja koska $\{1\} \neq \emptyset$ niin väite ei päde yleisesti

12. Olkoot $A = \{1, 2, 5, 76\}$ Miksi tässä tapauksessa ei joukkoa $\complement A$ voi määrittää?

    Ratkaisu: Komplementin määritelmä on mielekäs vain jonkin perusavaruuden yhteydessä jota meillä ei tässä ole. Esim jos perusavaruutena olisi $\mathbb{R}$ niin $\complement A$ olisi aivan eri joukko kuin jos perusavaruus olisi $\mathbb{N}$

13. Määritä seuraavien joukkojen komplementit kun perusjoukkona
    i) $X = \{x \in \mathbb{N} : x < 13\}$ ii) $Y = \mathbb{R}$

    (a) $\{1, 4, 6\}$
    Ratkaisu: i) $\{0, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. ii) $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 1, 4, 6\}$

    (b) $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 12\}$
    Ratkaisu: i) $\{0, 1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11\}$. ii) $\{x \in \mathbb{R} : x < 12\}$

(c) $\{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{P}\}$ kun $\mathbb{P}$ on alkulukujen joukko.
Ratkaisu: i) $\{0, 1, 8, 9, 10, 12\}$. ii) $\{x \in \mathbb{R} : x \notin \mathbb{P}\}$

14. Osoita luentomonisteen sivun 13 toinen lause. Nimittäin että perusjoukon X osajoukoille A, B pätee

$$A \subset B \Leftrightarrow \complement B \subset \complement A$$

Ratkaisu: Jos näistä tehtävistä jotain pitäisi jäädä mieleen niin se on tämänlaisten matemaattisten todistusten samankaltaisuus. Nyt osoitetaan ekvivalenssiä, eli ensin oletetaan vasen puoli ja johdetaan oikea, tämän jälkeen toisinpäin:

"$\Rightarrow$"
Ensin oletetaan siis $A \subset B$. Pitäisi osoittaa $\complement B \subset \complement A$. Tämä tehdään normaalisti ottamalla mielivaltainen alkio $x \in \complement B$. Nyt saadaan (Oletuksen käyttö merkattu tähdellä):

$$x \in \complement B \Rightarrow x \notin B* \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \in \complement A$$

"$\Leftarrow$"
Nyt osoitetaan toinen suunta. Eli nyt annettuna oletuksena on $\complement B \subset \complement A$ josta pitäisi saada $A \subset B$. Tämäkin voitaisiin tehdä normaalilla tavalla, mielivaltaisella alkiolla etc. Mutta vomme myös käyttää hyväksemme jo aikaisemmin osoittamaamme asiaa ja tietoa että $\forall A \;\; \complement\complement A = A$.

Aikaisemmin osoitimme että kaikille joukoille X, Y pätee $X \subset Y \Rightarrow \complement Y \subset \complement X$. Tämän hienous on että se että se pätee mielivaltaisille joukoille sekä se että todistimme tämän jo, saamme siis olettaa sen. Saamme siis valita $X = \complement B, Y = \complement A$. Nyt jo todistamamme kaava antaa:

$$\complement B \subset \complement A \Rightarrow \complement\complement A \subset \complement\complement B \Leftrightarrow A \subset B$$

Mikä osoittaa väitteen.

15. Määritä potenssijoukot $\mathcal{P}(A)$ seuraaville joukoille. (Lisäkysymys jota ei vaadita tehtävän tekoon, mitä voit sanoa potenssijoukon koosta verrattuna joukon kokoon? Tähän palataan vielä...)

(a) $\{3, 7, 12\}$ $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{3\}, \{7\}, \{12\}, \{3, 7\}, \{3, 12\}, \{7, 12\}, \{3, 7, 12\}\}$

(b) $\{1, 2, \{3\}, 4\}$
$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{\{3\}\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, \{3\}\}, \{1, 4\}, \{2, \{3\}\}, \{2, 4\}, \{\{3\}, 4\}$
$\{1, 2, \{3\}\}, \{1, 2, 4\}, \{1, \{3\}, 4\}, \{2, \{3\}, 4\}\{1, 2, \{3\}, 4\}\}$

(c) $*\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
Pienellä laskulla voisimme ennustaa että jos $|A| = m$ niin $|\mathcal{P}(A)| = 2^m$. Tähän palataan.

16. Oletetaan $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ osoita että silloin $A = B$

    Ratkaisu: Taaskin esimerkki "itsestään selvyydestä" jossa vaikein osa on ymmärtää mitä pitäisi todistaa, kuitenkin pitää taas tuttuun tapaan osoittaa $A \subset B$ ja $A \supset B$ annetun oletuksen $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ avulla.

    "$\subset$"
    Otetaan taas mv. $x \in A$ nyt seuraa (Huomaa erityisesti annetun oletuksen käyttö kohdassa *):

    $$x \in A \Rightarrow \{x\} \subset A \Rightarrow \{x\} \in \mathcal{P}(A)* \Rightarrow \{x\} \in \mathcal{P}(B) \Rightarrow \\ \{x\} \subset B \Rightarrow x \in B$$

    Ollaan siis osoitettu $A \subset B$

    Ja toisinpäin: "$\supset$"
    Olkoon nyt $y \in B$ mielivaltainen. Saadaan:

    $$y \in B \Rightarrow \{y\} \subset B \Rightarrow \{y\} \in \mathcal{P}(B)* \Rightarrow \{y\} \in \mathcal{P}(A) \Rightarrow \\ \{y\} \subset A \Rightarrow y \in A$$

    Eli $B \subset A$ ja yhdistämällä molemmat osoitetut asiat $A = B$

17. *Tarkastellaan seuraavaksi hieman tarkemmin erotteluaksiomaa (kurssimateriaali sivu 2)

    Kurssilla käyttämämme joukko oppi on ns. naivia joukko oppia. Tässä otetaan joukkojen muodostaminen ja sisältyminen tunnetuksi ("aksioomiksi"). Tämä riittää tälle kurssille oikein hyvin mutta syvällisemmässä joukko-opissa tälläinen määrittely johtaa paradokseihin. Mieti "joukkoa"
    $\{x \in \mathbb{N} :$ x:n kirjoittaminen suomeksi tekstinä vaatii yli 1000 merkkiä$\}$. Osoita että tälläinen joukko ei ole hyvin määritelty. Mieti myös miksi tälläinen määrittely ei anna erotteluaksioman takaamaa joukkoa.

    Ratkaisu: Nämä tehtävät olivat lähinnä tarkoitettu antamaan viitteitä siitä minkälaisia asioita voidaan tutkia syvällisemmässä joukko-opissa. Erotteluaksioma sanoo auki avattuna että jos meillä on joukko A niin voimme muodostaa uuden joukon B seuraavasti:

    $$B = \{x \in A : P(x)\}$$

    Eli joukkoon B kuuluvat ne A:n alkiot jotka toteuttavat logisen lauseen $P(x)$. Esimerkkinä voidaan valita $A = \mathbb{N}$ ja $P(x) \Leftrightarrow x \equiv 0 \mod 2$ (eli $P(x)$ jos ja vain jos x on parillinen). Tällöin erotteluaxioma takaa että kaikki sellaiset luonnolliset luvut jotka toteuttavat $P(x)$ muodostavat joukon.

    Kuitenkin erotteluaxioman vaatimuksena on että $P(x)$ voidaan esittää "formaalilla" kielellä. Tehtävän kannalta oleellista onkin ettei "x:n kirjoittaminen suomeksi tekstinä vaatii yli 1000 merkkiä" ole formaalia kieltä. Osoittaaksemme että tälläinen joukko ei ole hyvin määritelty käytämme seuraavaa argumentointia: Olkoon $P = \{x \in \mathbb{N} :$ x:n kirjoittaminen suomeksi tekstinä vaatii yli 1000 merkkiä$\}$. Oletamme että tämä olisi joukko. Koska luonnollisia lukuja on äärettömän paljon P ei ole tyhjä. Nyt käytämme ohjeen mainitsemaa hyvinjärjestysperiaatetta: P on epätyhjä luonnollisten lukujen osajoukko joten siellä on pienin alkio. Kutsutaan sitä a:ksi. Nyt siis $a \in P$ kuitenkin voimme sanoa että $a =$"pienin luonnollinen luku jota ei voi kirjoittaa suomeksi tuhannella merkillä". Tuossa oli suomen kielellä kirjoitettu mitä a on alle tuhannella merkillä suomeksi. Eli $a \notin P$. Saatiin siis $a \in P \Rightarrow a \notin P$ mikä on ristiriita.

18. *Edellinen tehtävä osoittaa yhden erotteluaksioman "väärän" käyttötavan. Toinen selitetään materiaalissa Russelin paradoksina. Osoita samaan seikkaan nojaten ristiriita joukon P määritelmässä $P = \{x : x \text{ on joukko}\}$ eli osoita ettei ole olemassa kaikkien joukkojen joukkoa. Kaikkien joukkojen "kokoelmaa"kutsutaan aksiomaattisessa joukko opissa joskus "luokaksi" eikä joukoksi.

    Ratkaisu: Nyt siis näytetään kuinka erotteluaksioman tarkka muotoilu estää kaikkien joukkojen joukon olemassa olon.

    Tämän voisi tehdä vastaoletuksella, mutta teemme sen sen sijaan "suoraan". Eli olkoon A mv. joukko. Osoitamme että on olemassa joukko joka ei kuulu A:han (eli A:han ei voi kuulua kaikki joukot). Erotteluaksioman nojalla voimme A:sta muodostaa joukon

$$B = \{x \in A : x \notin x\}$$

    Nyt väitämme että $B \notin A$. Tehdään vastaoletus. Oleteaan että $B \in A$. Jos nyt kysymme, onko B itsensä jäsen, niin voimme todeta että

$$B \in B \Leftrightarrow B \in A \wedge B \notin B$$

    Koska oletimme $B \in A$ tästä jää jäljelle

$$B \in B \Leftrightarrow B \notin B$$

    Tämä on ristiriita ja vastaoletus täytyy hylätä. Saimme siis $B \notin A$ ja A ei siten voi olla kaikkien joukkojen joukko.