Diskreetin Matematiikan Paja

Tehtäviä viikolle 1. (14.3 - 18.3)

Jeremias Berg

Tervetuloa kevään 2011 Diskreetin matematiikan pajaan. "Pajahengessä" kurssin suorituksessa tärkeimmässä roolissa tulee olemaan tehtävien tekeminen. Tähdellä merkityt tehtävät ovat hieman haastavampia. Näistäkin saa lisäpisteitä, mutta ilman niitäkin on mahdollista saada täydet pisteet.

1. Luettele kaikki seuraavien joukkojen alkiot:

   (a) $\{x \in \mathbb{Z} : |x| \leq 3\}$

   (b) $\{x \in \mathbb{N} : x > 12 \wedge x < 7\}$

   (c) $\{x \in \mathbb{N} : -1 \leq x \leq 7\}$

2. Mitkä seuraavista joukoista ovat samat? Miksi? Miksi ei? (yritä perustella vastauksiasi käyttäen extensioaksiomaa (kussimoniste sivu 2))

   (a) $\{2, 3, 4, 5\}$ ja $\{3, 2, 2, 4, 5\}$

   (b) $\{2, 3, 4, 5\}$ ja $\{2, 2, 3, 4, 5, 6\}$

   (c) $\{x \in \mathbb{Z} : |x| \leq 3\}$ ja $\{x \in \mathbb{Q} : |x| \leq 3\}$

   (d) $\{x \in \mathbb{Z} : |x| \leq 3\}$ ja $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 \leq 9\}$

   (e) $\{x \in \mathbb{N} : x^2 - 3x + 2 = 0\}$ ja $\{0, 1, 2\}$

3. Olkoot $A = \{0, \{1\}, \emptyset, \{2, 3\}\}$ Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa? Taas pitäisi, (ainakin siellä missä se on mielekästä) perustella...

   (a) $\emptyset \subset A$

   (b) $\emptyset \in A$

   (c) $1 \subset A$

   (d) $\{1\} \in A$

   (e) $\{1\} \subset A$

   (f) $\{\{1\}\} \subset A$

4. Osoita että kaikille joukoille A ja B pätee että $((A \subset B \wedge B \subset A)) \Rightarrow A = B$ (Voit esim annetusta oletuksista johtaa Ekstensioaksiooman)

5. Osoita myös toinen suunta eli $((A \subset B \wedge B \subset A)) \Leftarrow A = B$.

   Nyt olet itseasiassa osoittanut $((A \subset B \wedge B \subset A)) \Leftrightarrow A = B$ Tällainen tekniikka on hyvin yleinen kun halutaan osoittaa ekvivalensseja. Ensin osoitetaan että ekvivalenssin vasemmasta puolesta seuraa oikea ja sen jälkeen että oikeasta seuraa vasen. Tämä vastaa logiikassa tautologiaa $(((p \to q) \wedge (q \to p)) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q))$

6. Tarkastellaan joukkoja $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 7, 9\}$ ja $C = \{2, 5, 7\}$. Määritä joukot
   (a) $A \cup B$, $A \cup C$ ja $B \cup C$
   (b) $A \cap B$, $A \cap C$ ja $B \cap C$
   (c) $A \cup \emptyset$ ja $A \cap \emptyset$
   (d) $A \backslash B$, $B \backslash A$, $A \backslash C$ja $C \backslash B$.

7. Piirrä Vennin kaavio joka havainnollistaa seuraavia joukkoja (luentomateriaali sivu 9):
   (a) $A \cup B$
   (b) $B \cup A$
   (c) $A \cap (B \cup C)$
   (d) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

   Mitä voit nähdä kaavioistasi kun vertaat esim
   Reaalilukujen tunnettuun sääntöön $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x + y = y + x$ ja $x(y + z) = xy + yz$. Ensimmäinen ominaisuus sanoo että yhteenlasku reaaliluvuilla on kommutatiivinen laskuoperaatio ja toinen että reaalilukujen yhteen ja kertolasku ovat ditributiivisia. Mieti kommutoiko leikkausoperaatiokin?

8. Vaikka vennin kaavio onkin yleensä kätevä apuväline joukkojen käsittelyyn se ei kuitenkaan ole matemaattinen todistus. Todista tehtävän 7 viimeinen havainto matemaatisesti. Ts. osoita että kaikille joukoille A, B, C on voimassa

   $$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

   Huomaa myös tekniikka jota tälläisissä todistuksissa käytetään (katso tehtävä 5 ja moniste sivu 5)

9. Piirrä vennin kaavio siitä de Morganin laista jota ei todistettu muistiinpanoissa, eli

   $$A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$$

10. Todista edellinen laki matemaattisesti.

11. Onko kaikilla joukoilla A, B, C voimassa $A \cup (B \backslash C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$?

12. Olkoot $A = \{1, 2, 5, 76\}$ Miksi tässä tapauksessa ei joukkoa $\complement A$ voi määrittää?

13. Määritä seuraavien joukkojen komplementit kun perusjoukkona
i) $X = \{x \in \mathbb{N} : x < 13\}$ ii) $Y = \mathbb{R}$

   (a) $\{1, 4, 6\}$

   (b) $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 12\}$

   (c) $\{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{P}\}$ kun $\mathbb{P}$ on alkulukujen joukko.

14. Osoita luentomonisteen sivun 13 toinen lause. Nimittäin että perusjoukon X osajoukoille A, B pätee
$$A \subset B \Leftrightarrow \complement B \subset \complement A$$

15. Määritä potenssijoukot $\mathcal{P}(A)$ seuraaville joukoille. (Lisäkysymys jota ei vaadita tehtävän tekoon, mitä voit sanoa potenssijoukon koosta verrattuna joukon kokoon? Tähän palataan vielä...)

   (a) $\{3, 7, 12\}$

   (b) $\{1, 2, \{3\}, 4\}$

   (c) $*\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

16. Oletetaan $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ osoita että silloin $A = B$

17. *Tarkastellaan seuraavaksi hieman tarkemmin erotteluaksiomaa (kurssimateriaali sivu 2)

   Kurssilla käyttämämme joukko oppi on ns. naivia joukko oppia. Tässä otetaan joukkojen muodostaminen ja sisältyminen tunnetuksi ("aksioomiksi"). Tämä riittää tälle kurssille oikein hyvin mutta syvällisemmässä joukko-opissa tälläinen määrittely johtaa paradokseihin. Mieti "joukkoa"
   $\{x \in \mathbb{N} :$ x:n kirjoittaminen suomeksi tekstinä vaatii yli 1000 merkkiä$\}$. Osoita että tälläinen joukko ei ole hyvin määritelty. Mieti myös miksi tälläinen määrittely ei anna erotteluaksioman takaamaa joukkoa.

   (Ohje, käytä induktion yhteydessä tutuksi tulevaa hyvinjärjestysperiaatetta: **jokaisessa epätyhjässä luonnolisten lukujen osajoukossa on pienin alkio).**

18. *Edellinen tehtävä osoittaa yhden erotteluaksioman "väärän" käyttötavan. Toinen selitetään materiaalissa Russelin paradoksina. Osoita samaan seikkaan nojaten ristiriita joukon P määritelmässä $P = \{x : x \text{ on joukko}\}$ eli osoita ettei ole olemassa kaikkien joukkojen joukkoa. Kaikkien joukkojen "kokoelmaa"kutsutaan aksiomaattisessa joukko opissa joskus "luokaksi" eikä joukoksi.