Diskreetin Matematiikan Paja

Tehtäviä viikolle 2. (24.3 - 25.3)

Jeremias Berg

Tämän viikon tehtävien teemoina on tulojoukot, relaatiot sekä kuvaukset. Näistä varsinkin relaatiot ja kuvaukset ovat tärkeitä jatkon kannalta. Materiaali käsittelee näitä suurinpiirtein sivuilla 14 - 28. Tässä vaiheessa voi tuntua puuduttavalta tehdä samalta tuntuvaa asiaa uudestaan ja uudestaan. Varmistu kuitenkin siitä että ymmärrät käsiteltävät asiat, ne ovat tärkeässä roolissa melkein kaikessa matematiikassa.
Laskuharjoituksista lisäpisteitä niin että:
85% tehtynä antaa kokeeseen 50% lisäpisteitä.
75% tehtävistä 40% koepisteistä
65% tehtävistä 30% koepisteistä
55% tehtävistä 20% koepisteistä

Toisin sanoen tehtäviä tekemällä voi kurssista päästä läpi saamatta pistettäkään kokeesta (tosin arvosana tällöin 1!) Tässä vaiheessa voi myös huomauttaa että arvosanan 5 saamiseksi ei täydet koepisteet riitä, eli vitosen saamiseksi pitää tehdä ainakin 55% laskuharjoituksista.

1. Olkoot $A_1 = \{1, 2, 3\}, A_2 = \{A_1, 5, 6\}, A_3 = \{A_2, A_1, 7\}, D = \{A_1, A_2, A_3\}$ Kirjoita auki seuraavat joukot:
   (a) $\mathcal{P}(A_1)$
   (b) $\mathcal{P}(A_2)$
   (c) $\mathcal{P}(D)$
   (d) $\bigcup D$

2. Kirjoita auki seuraavat tulojoukot
   (a) $\{67, 5, 34\} \times \{99, 87\}$
   (b) $\{67, 5, 34\} \times \emptyset$
   (c) $\{67, 5, 34\} \times \{\emptyset\}$
   (d) $\{a, e, i, o, u\} \times \{d, t\}$

3. Olkoot $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 10\}$ ja $B = \{x \in \mathbb{Z} : |x| < 3\}$
   (a) Mitä silloin on joukossa $A \times B$ entä joukossa $B \times A$.
   (b) Kuinka monta alkiota on joukossa A ja B, entäs $A \times B$.
   (c) Tee hypoteesi edellisen kohdan havainolle ja osoita yleisesti että jos $|A| = m$, $|B| = n$ niin $|B \times A| = |A \times B| = n * m$
   Huom! Tässä vaiheessa riittää ”informaali”käsittely joukon koon käsitteelle, ensi viikolla formalisoimme tämän käsitteen.

4. Todista että kaikille joukoille X, Y ja $A \subset X, B \subset Y$ pätee:

$$\complement(A \times B) = \complement A \times Y \cup X \times \complement B$$

5. Piirrä seuraavat järjestetyt parit koordinaatistoon.

   (a) $(3, 4)$
   (b) $(4, 3)$
   (c) $(1, 2)$
   (d) $(2, 1)$
   (e) $(-3, -5)$
   (f) $(-2, 2)$
   (g) $(2, -2)$

   Päteekö yleisesti $(a, b) = (b, a)$?

6. Materiaali mainitsee että järjestetyille pareille voidaan antaa joukkoopillinen määritelmä $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$

   (a) Osoita ensiksi että määritelmänä ei toimi $(a, b) = \{\{a\}, \{b\}\}$ (Mitä huomasit tehtävässä 5?)
   (b) *Osoita nyt että $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ (Ekstensioaksioma auttaa. Tehtävänä on määritelmää apuna käyttäen osoittaa $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$)

7. Olkoot $X = \{1, 2, 3, 4....10\}$ Kirjoita auki seuraavat Relaatiot. Piirrä myös nuolikaaviot (sivu 18).

   (a) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in X \times X : x = 2y\}$
   (b) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in X \times X : x = 5 - y\}$
   (c) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in X \times X : x = y\}$
   (d) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in X \times X : \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{Z}\}$

8. Olkoon X joukko $A \subset X, B \subset X$ ja R joukon X relaatio. Osoita seuraavat seikat. (Muista että määrittelemme Relaation käsitteen joukkona, eli näissä todistuksissa käytetään samoja tekniikoita kun viime viikolla osittaessamme joukkoja samoiksi).

   (a) $R(A \cup B) = R(A) \cup R(B)$
   (b) $R(A \cap B) \subset R(A) \cap R(B)$ Anna myös esimerkki tapauksesta jossa sisältyminen on aitoa (eli $\exists x \in R(A) \cap R(B) \wedge x \notin R(A \cap B)$).

9. Kirjoita auki tehtävän 7 käänteisrelaatiot.

10. Olkoot $X = \{1, 2, 3, 4\}$ Mitkä seuraavista relaatioista ($X \times X$ osajoukoista) ovat funktioita, miksi? Miksi ei? (Perustelujen tukena kannattaa käyttää määritelmää joka löytyy sivulta 22)

    (a) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
    (b) $\{(1, 4), (2, 3), (2, 2), (4, 1)\}$
    (c) $\{(2, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 4)\}$
    (d) $\{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$

11. Muuta niitä tehtävän 10 relaatioita jotka eivät olleet funktioita jollain sopivalla laillla "tehdäksesi"niistä funktioita. (Huomaa siis että kaikki funktiot ovat relaatioita, mutta kaikki relaatiot eivät ole funktioita).

12. Olkoot X taas kuten tehtävässä 10. Olkoot $f : X \to X, f(x) = x+1$ Onko f kuvaus? entä jos $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$?

13. Olkoot $A = \{1, 2\}$

    (a) Muodosta kaikki kuvaukset $f : A \to A$,,
    (b) Anna esimerkki joukon A relaatiosta joka ei ole funktio

14. Olkoon $f : X \to Y$ ja $C, D \subset Y$ Osoita:

    (a) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
    (b) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$
    (Tässäkin on kyse joukkojen samaksi osoittamisesta, määritelmiä löytyy sivulta 23).

15. Mitkä seuraavista kuvauksista ovat, injektioita? surjektioita? bijektioita? Mikäli kuvaukset ovat bijektoita määrittele käänteiskuvaus. Pyri taas perustelemaan määritelmien avulla.

    (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = |x|$
    (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x^2 + 4$
    (c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x^3 + 6$
    (d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = |x| + x$
    (e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x(x - 2)(x + 2)$
    Huomaa myös tälläisten todistusten ja joukkoopillisten todistusten läheinen yhteys, esim surjektivisuus osoitetaan tässä tapauksessa osoittamalla $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

16. Olkoon $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ kuvaus. Onko f bijektio kun:

   (a) $f(x) = x$

   (b) $f(x) = x^2$

   (c) $f(x) = 3x$

   (d) $f(x) = \begin{cases} x-1, x < 0, \\ x, x \geq 0 \end{cases}$

17. Olkoon $f : A \to B$ surjektio.

   (a) Osoita että
   $$f(f^{-1}(Y)) = Y \; \forall Y \subset B$$

   (b) Osoita että
   $$f^{-1}(f(X)) = X \; \forall X \subset A \Leftrightarrow f \text{ on injektio}$$

   (c) *Osaatko osoittaa edellisen kohdan $\Rightarrow$ suunnan kahdella "eri tavalla". Sekä suoraan: Olettamalla vasemman puolen ja johtamalla oikean. Että käyttäen hyväksesi Logiikka 1:sen tulosta $p \to q \leftrightarrow \neg q \to \neg p$. Näistä ensimmäistä tapaa sanotaan konstruktiiviseksi todistukseksi ja toista vasta oletukseksi. Huomaa myös miten todistukset eroavat, kumpi oli helpompi?.

18. Olkoot A ja B joukkoja joissa A:ssa n alkiota ja B:ssa m (TS. $|A| = n, |B| = m$) ja $f : A \to B,\; g : B \to A$ kuvauksia.

   (a) Jos $a < b$ niin mitä johtopäätöksiä liittyen injektiivisyyteen ja surjektiivisuuteen voit sanoa f:stä ja g:stä.

   (b) Oletetaan nyt että $a = b$. Osoita että
   $$f \text{ on injektiivinen } \Leftrightarrow f \text{ on surjektiivinen}$$

19. *Olkoot X joukko ja R_1, R_2 sen relaatioita. Määritellään
   $$R_1 \circ R_2 = \{(x, y) \in X \times X : \exists z((z, y) \in R_2 \wedge (x, z) \in R_1)\}$$
   Olkoon nyt X joukko R sen relaatio. Osoita että
   $$R \circ R \subset R \Rightarrow R \text{ on transitiivinen}$$

20. *Sitten lopuksi vähän enemmän relaatioista. Varsinkin joukkoopissa relaatiot ovat joskus melkeimpä tärkeämpiä kuin funktiot. olkoot X joukko ja R joukon relaatio. Sanomme että R on ekvivalenssirelaatio jos kaikille $a, b, c \in X$ pätee:

   (a) $(a, a) \in R$, sanomme että relaatio on *refleksiivinen*

(b) $(a, b) \Rightarrow (b, a) \in R$ sanomme että relaatio on *symmetrinen*

(c) $(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$ sanomme että relaatio on *transitiivinen*

Olkoot nyt $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ja $R = \{((a, b), (c, d)) \in X \times X : a + d = b + c \quad a, b, c, d \in \mathbb{N}\}$ Osoita että R on ekvivalenssirelaatio. (Huomaa siis että R on relaatio joukolle $\mathbb{N}^4$ eli jokainen R:n alkio "koostuu"4:stä luonnollisesta luvusta