Diskreetin Matematiikan Paja
Kokeen mallivastaus ja arvosteluperiaaate
Jeremias Berg

1. (a) 2p) Kuinka monta eri “sanaa” voidaan muodostaa sanan TIEDEBASAARI kirjaimista. Muista myös että pelkistä laskuista ilman perusteluja ei saa täysiä pisteitä. *Jos laskin sattui jäämään kotiin niin sievennetty lauseke riittää.*

   (b) 4p) Osoita määritelmien avulla että kuvaus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^3 + 1$ on injektio, surjektio ja myös bijektio. (kuutiojuurifunktion injektiivisyyden saa olettaa tunnetuksi)

   Ratkaisu:

   (a) Tässä siis haettiin sanan TIEDEBASAARI permutaatioita. Ottamatta huomioon samoja kirjaimia eri mahdollisuuksia on kirjainten lukumäärän kertoma. Eli tässä tapauksessa 12!. Kuitenkin tuosta luvusta pitää jakaa pois toistuvien kirjainten lukumäärän kertomat. Tässä tapauksessa sanassa on 3 A:ta 2 E:tä 2 I:tä. Eli haettu lukumäärä on:

$$\binom{12}{3\,2\,2} = \frac{12!}{3!2!2!} = 19958400$$

   (b) Ehkä hieman hankalahko tehtävä. Injektiivisyyden osoittamiseksi piti siis osoittaa että mielivaltaisille $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$ pätee $f(x_1) \neq f(x_2)$ tai ekvivalentisti $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Tässä ei riittänyt määritelmien toistaminen, vaan avainsanana on osoittaminen. Otetaan siis kaksi mielivaltaisa $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ja osoitetaan että $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Kuutiojuurifunktion injektiivisyyden käyttö on merkitty tähdellä:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^3 + 1 = x_2^3 + 1 \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \overset{*}{\Rightarrow} x_1 = x_2$$

   Surjektiivisuuteen taas piti osoitaa että jos otetaan mv. y maalijoukosta ($\mathbb{R}$) niin löytyy x lähtöjoukosta jolle pätee että $f(x) = y$. Eli otetaan mv. $y \in \mathbb{R}$. Nyt $\exists x \in \mathbb{R} : x = \sqrt[3]{y-1}$. Tälle x pätee:

$$f(x) = f(\sqrt[3]{y-1}) = (\sqrt[3]{y-1})^3 + 1 = y - 1 + 1 = y$$

   Joka osoittaa että jokaiselle maalijoukon alkiolla löytyy lähtöjoukon alkio joka kuvautuu sille. Eli kuvais on surjektio. Koska kuvaus on injektio ja surjektio se on myös bijektio.

   Arvostelu:

   (a) Tässä pisteen sai oikeasta laskusta ja toisen perustelusta. Mikäli perustelu oli hyvä ei “ilmiselvä” huolimattomuusvirhe laskussa rokottanut pisteitä.

(b) Tässä jos ei käyttänyt määritelmää maksimipisteet olivat 2. Muuten injektiivisyydestä ja surjektiivisuudesta sai 3 pistettä yhteensä josta menetti yhden heikoista perusteluista. Viimeisen pisteen sai kun muisti huomauttaa bijetiivisyydestä.

2. (a) 2p) Mitä eroa on ensimmäisen periaatteen induktio-oletuksella ja toisen periaatteen induktio-oletuksella.

   (b) 4p) Todista induktiolla jompikumpi seuraavista kaavoista, eli osoita että kaikille $n \in \mathbb{N} : n > 0$:

   i.
$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)...\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}$$

   ii.
$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)...\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n+2}{2}$$

Ratkaisu:

(a) Ehkä koko kokeen yllättävin tehtävä korjata. Ensimmäisen periaatteen induktio oletus olettaa väitteen jollekin $n \in \mathbb{N}$. Toisen olettaa väitteen kaikille $k \leq n$ jollekin $n \in \mathbb{N}$. Tätä piti käyttää muunmuassa sulkaalevy tehtävässä tai joissain fibonacci lukuja käsittelevissä tehtävissä. Aika yleinen virhe oli väite että ensimmäinen periaate olettaa väiteen n:lle ja todistaa $n+1$ kun taas toinen olettaa $n-1$ ja todistaa n. Tämä on matemaattisesti katsottuna aivan sama asia joten näitä asioita ei olla eroteltu eri kategorioiksi.

(b) Todistetaan esimerkin vuoksi ensimmäinen kaava. Toinen on käytännössä aivan sama. Tässä oli tärkeää huomata että termejä kerrottiin yhteen, ei summattu:

   i. Perusaskel: kun $n = 1$ niin:
$$\begin{cases} 1-\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{1+1}=\frac{1}{2} \end{cases}$$
   Eli väite pätee.

   ii. Induktio oletus. Oletetaan että väite pätee jollekin $n \in \mathbb{N}$. Eli oletetaan
$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)...\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}$$
   Nyt arvolle $n+1$ pätee (oletuksen käyttö merkattu tähdellä):
$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)...\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)+1}\right)=$$
$$\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)...\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right)\left(\frac{n+2-1}{n+2}\right)\overset{*}{=}$$
$$\frac{1}{n+1}\frac{n+1}{n+2}=\frac{1}{n+2}$$

Joka osoittaa väitteen. Eli Induktioperiaatteen nojalla väite pätee kaikille $n \in \mathbb{N}$

Arvostelu:

(a) Tässä yhden pisteen sai kun selitti jomman kumman periaatten oikein. Toisen kun osasi selittää niiden erot.

(b) Yksi piste perusaskeleesta. 2 induktio oletuksesta ja seuraavan arvon johtamisesta (toinen piste tuli selkeydestä, jos vastauksesta selvästi kävi ilmi että ymmärsi mitä oli tekemässä). Viimeinen piste tuli kommentista: “Induktioperiaatteen nojalla väite pätee kaikille n” tai vastaavasta.

3. 6p) Olkoon X perusavaruus ja $C, D \subset X$. Merkitään C:n ja D:n symmetristä erotusta seuraavasti:

$$C \triangle D = C \setminus D \cup D \setminus C$$

Osoita että:

$$\complement(C \triangle D) = (D \cap C) \cup \complement(C \cup D)$$

(Tässä siis $\complement C$ tarkoitaa C:n komplementtia perusavaruudessa)

Ratkaisu: Joukko-oppi tehtävä. Ratkaistaan tuttuun tyyliin:
“$\subset$”
Olkoon $x \in \complement(C \triangle D)$ mielivaltainen. Nyt pätee:

$$x \notin (C \triangle D) \Rightarrow \neg(x \in ((C \setminus D) \cup (D \setminus C))) \Rightarrow \neg((x \in C \wedge x \notin D) \vee (x \in D \wedge x \notin C)) \Rightarrow$$
$$(x \notin C \vee x \in D) \wedge (x \notin D \vee x \in C) \Rightarrow$$
$$\begin{cases} x \notin C \wedge x \in C \text{ Ristiriita} \\ x \in D \wedge x \notin D \text{ Ristiriita} \\ x \notin C \wedge x \notin D \Rightarrow x \notin (C \cup D) \Rightarrow x \in \complement(C \cup D) \\ x \in D \wedge x \in C \Rightarrow x \in (D \cap C) \end{cases}$$
$$\Longrightarrow x \in (D \cap C) \cup \complement(C \cup D)$$

Joka osoitaa tämän suunnan.
“$\supset$”
Olkoon $x \in (D \cap C) \cup \complement(C \cup D)$ mv. Nyt pätee:

$$x \in (D \cap C) \vee x \in \complement(C \cup D) \Rightarrow$$
$$1) \quad x \in (D \cap C) \Rightarrow x \in D \wedge x \in C \Rightarrow \neg(x \notin D \vee x \notin C) \Rightarrow$$
$$\neg((x \in C \wedge x \notin D) \vee (x \in D \wedge x \notin C)) \Rightarrow \neg(x \in (C \setminus D) \vee x \in (D \setminus C)) \Rightarrow$$
$$\neg(x \in (C \triangle D)) \Rightarrow x \in \complement(C \triangle D)$$
$$2) \quad x \in \complement(C \cup D) \Rightarrow x \notin (C \cup D) \Rightarrow x \notin C \wedge x \notin D \Rightarrow$$
$$\neg(x \in C \vee x \in D) \Rightarrow \neg((x \in C \wedge x \notin D) \vee (x \in D \wedge x \notin C)) \Rightarrow \neg((x \in (C \setminus D) \vee x \in (D \setminus C) \Rightarrow$$
$$\neg(x \in (C \triangle D)) \Rightarrow x \in \complement(C \triangle D)$$

Joka osoittaa toisen suunnan.

Arvostelu: Lähtökohta oli että yhdestä suunnasta saa maksimissaan 3, toisesta 3. Jos oli osoittanut "ei formaalisti", vain esim. kaavioilla, maksimipisteet olivat 3. Jos oli osoitettu ekvivalensseilla käytiin ketju läpi molempiin suuntiin erikseen ja annettiin maksimissaan 3 per suunta. Pisteitä menetti enemmän huonoista loogisista askelista mutta erittäin epäselvistä vastauksistakin menetti yhden pisteen.

4. 6p) Olkoot $R, S \subset Y \times Z$ relaatioita ja $T \subset X \times Y$ relaatio. Osoita että

$$(R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T)$$

Vihje: Muista määritelmä. jos $S, \subset Y \times Z$ ja $T \subset X \times Y$ niin $S \circ T = \{(x,z) : \exists y \in Y\,((x,y) \in T \wedge (y,z) \in S\}$

Ratkaisu: Relaatio tehtävä jossa myös kosketettiin joukko-oppia. Osoitetaan tuttuun tapaan:

"$\subset$"
Olk $(x,z) \in (R \cup S) \circ T$ mielivaltainen. Nyt pätee:

$$(x,z) \in (R \cup S) \circ T \Rightarrow \exists y \in Y((x,y) \in T \wedge (y,z) \in (R \cup S)) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (y,z) \in R \Rightarrow \exists y \in Y((x,y) \in T \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R \circ T \Rightarrow (x,z) \in (R \circ T) \cup (S \circ T) \\ (y,z) \in S \Rightarrow \exists y \in Y((x,y) \in T \wedge (y,z) \in S \Rightarrow (x,z) \in S \circ T \Rightarrow (x,z) \in (R \circ T) \cup (S \circ T) \end{cases}$$

"$\supset$"
Olk $(x,z) \in (R \circ T) \cup (S \circ T)$ mielivaltainen. Nyt pätee:

$$\begin{cases} 1) \quad (x,z) \in (R \circ T) \Rightarrow \exists y \in Y((x,y) \in T \wedge (y,z) \in R) \\ \Rightarrow \exists y \in Y((x,y) \in T \wedge (y,z) \in (R \cup S)) \Rightarrow (x,z) \in (R \cup S) \circ T \\ 2) \quad (x,z) \in (S \circ T) \Rightarrow \exists y \in Y((x,y) \in T \wedge (y,z) \in S) \\ \Rightarrow \exists y \in Y((x,y) \in T \wedge (y,z) \in (R \cup S)) \Rightarrow (x,z) \in (R \cup S) \circ T \end{cases}$$

Arvostelu: Katso edellinen tehtävä. Tässä 2 pistettä sai määritelmän oikeoppisesta käytöstä.