

Diskreetin Matematiikan Paja

Kertaavia tehtävät

Jeremias Berg

1. Kirjoita joukko-opillisten merkintöjen avulla seuraavat joukot:

- (a) Yhtälön $x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$ ratkaisut.
- (b) Parillisten negatiivisten kokonaislukujen joukko.
- (c) Luvulla 5 jaollisten kokonaislukujen joukko.
- (d) Niiden luonnollisten lukujen joukko jotka ovat jonkin kokonaisluvun neliötä.

2. Todista että mv. joukoille A, B ja C pätee:

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$$

3. Piirrä koordinaatistoon seuraava relaatio:

$$R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (x, y) \in R \Leftrightarrow y < -x^2 + 1 \wedge y > x + 1$$

4. Olkoot $R \subset X \times Y$ ja $S \subset X \times Y$ relaatioita. Osoita että on voimassa:

- (a) $(R^{-1})^{-1} = R$
- (b) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$

5. Selvitä seuraavista ovatko seuraavat relaatioista refleksiivisiä, symmetrisiä tai transitiivisiä, joukossa $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Muista että $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

- (a) $\{(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid (x + y) \text{ on parillinen}\}$
- (b) $\{(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid (x - y) < 10\}$
- (c) $\{(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid x|y\}$
- (d) $\{(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid xy \text{ on parillinen}\}$

6. Ovatko seuraavat kuvaukset $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, injektioita, surjektioita tai bijektioita? Osoita määritelmän avulla:

- (a) $f(x) = x^5$
- (b) $f(x) = x^6$
- (c) $f(x) = x^3 - x^2$
- (d) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$
- (e) $f(x) = \sin x$

7. Määritellään kuvaus seuraavasti: $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ $f(z)$ on suurin kokonaisluku joka on viidellä jaollinen ja jolle pätee $f(z) \leq z$. Eli: $f(1) = 0, f(2) = 0 \dots f(5) = 5, f(6) = 5$ etc. Määritä sellaiset kokonaislukujen osajoukot A, B, C ja D että on voimassa:

(a) $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$

(b) $f^{-1}f(C) \neq C$

(c) $f(f^{-1}(D)) \neq D$

8. Osoita että relaatio R on symmetrinen $\Leftrightarrow R^{-1} = R$

9. Määrittele käsitteet funktio ja relaatio. Mitkä seuraavista relaatioista joukossa $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ovat funktioita:

(a) $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$

(b) $\{(1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 5), (5, 5)\}$

(c) $\{(1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 5), (5, 5)\}$

(d) $\{(1, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 3)\}$

(e) $\{(1, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 3), (5, 4)\}$

10. Olkoon X, Y, Z, W joukkoja ja $R \subset X \times Y$ $S \subset Y \times Z$ ja $T \subset Z \times W$ relaatioita. Osoita että on voimassa:

$$R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$$

Muista yhdistetyn relaation määritelmä.

11. Olkoon $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : n = a^2 \text{ jollekin } a \in \mathbb{Z}\}$. Määrittele bijektio $f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow A$ ja sen käänteisfunktio f^{-1}

12. Todista induktiolla luvun n suhteen että jos $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ ovat luonnollisia lukuja niin

$$\sum_{k=1}^n k_i < n \cdot \max k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$$

13. Määritellään lukujono $L(n)$ seuraavasti:

$$\begin{cases} L(0) = 0 \\ L(1) = 1 \\ L(n) = 2L(n-2) + 1 \end{cases}$$

Osoita että $L(2n) = 2^n - 1$ kaikille $n \in \mathbb{N}$

14. Osoita että luku $n^3 + 20n$ on jaollinen kolmella kaikille $n > 0$.

15. Osoita induktiolla että:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2 = \frac{n(2n - 1)(2n + 1)}{3}$$

16. Liisalla on 11 työtoveria, 8 miestä ja 3 naista, joista hän kutsuu osan syömään. Kuinka monta eri seuruetta voi syntyä, jos Liisa kutsuu:

(a) ainakin 9 työtoveriaan

(b) kaikki naiset ja miehiä sen verran, että naisia ja miehiä on yhtä monta (Liisa mukaan lukien).

17. Kuinka monta sellaista 3-numeroista parillista luonnollista lukua on olemassa, joissa sama numero ei esiinny monta kertaa?

18. Määritellään verkko G asettamalla:

$$P_G = \mathcal{P}([5]) = \{A : A \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}\} \quad V_G = \{\overline{AB} : A, B \in \mathcal{P}([5]), A \neq B, A \cap B = \emptyset\}$$

Onko verkossa Eulerin kulkua?