Henkivakuutusmatematiikan jatkokurssin harjoitus 3, 21.2.2011

Huom. Tehtäviä 1 - 3 on muutettu 14.2.2011
Tehtävissä 1 - 3 oletetaan, että $\mu_{13} \equiv 0$.

1. (jatkoa edellisen kerran tehtäviin) Osoita, että

$$\begin{aligned} & \int_0^t e^{-D(s)}[\delta(s)V_1(s) - V_1'(s)]\mathbf{1}(Z(s-) = 1)ds \\ = \;& P - e^{-D(t)}V_1(t)\mathbf{1}(Z(t) = 1) - \int_0^t e^{-D(s)}V_1(s)dN_{12}(s) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} & \int_0^t e^{-D(s)}[\delta(s)V_2(s) - V_2'(s)]\mathbf{1}(Z(s-) = 2)ds \\ = \;& -e^{-D(t)}V_2(t)\mathbf{1}(Z(t) = 2) - \int_0^t e^{-D(s)}V_2(s)dN_{23}(s) + \int_0^t e^{-D(s)}V_2(s)dN_{12}(s). \end{aligned}$$

2. (jatkoa) Olkoon

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= P - \int_0^t e^{-D(s)}S_{12}(s)dN_{12}(s) - \int_0^t e^{-D(s)}S_{23}(s)dN_{23}(s) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{2} e^{-D(t)}V_j(t)\mathbf{1}(Z(t) = j) \end{aligned}$$

hetkeen t mennessä kertyneen ylijäämän nykyarvo. Osoita, että $\{\Gamma(t) | \, t \in [0, n]\}$ on martingaali, $\mathbb{E}(\Gamma(t)) = 0$, ja että

$$\Gamma(t) = \int_0^t e^{-D(s)}(V_1(s) - V_2(s) - S_{12}(s))dM_{12}(s) + \int_0^t e^{-D(s)}(V_2(s) - S_{23}(s))dM_{23}(s)$$

kaikilla $t \in [0, n]$.

3. (jatkoa) Osoita, että

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\,(\Gamma(t)) &= \int_0^t e^{-2D(s)}(V_1(s) - V_2(s) - S_{12}(s))^2\mu_{12}(s)P_{11}(0, s)ds \\ &\quad + \int_0^t e^{-2D(s)}(V_2(s) - S_{23}(s))^2\mu_{23}(s)P_{12}(0, s)ds. \end{aligned}$$

4. Eläkevakuutuksessa vakuutettu maksaa vuosittain takakäteisesti vakuutusmaksun P n vuoden ajan. Hetkellä n yhtiö alkaa maksaa jatkuvaa eläkettä siten, että intensiteetti on $S(1 + \alpha)^t$ hetkellä $t \geq n$, missä S ja α ovat positiivisia vakioita. Määrää sellainen funktio C, että syntyvän kassavirran nykyarvo on

$$\int_0^\infty e^{-D(t)}\mathbf{1}(T \geq t)dC(t),$$

missä D on kuten edellisessä tehtävässä ja T on vakuutetun jäljellä oleva elinaika.

5. Olkoon $\hat{R}_k(t)$ Nelson-Aalen -estimaattori syyhyn k liittyvälle kumulatiiviselle kuolevuusintensiteetille $R_k(t)$,

$$R_k(t) = \int_0^t \mu_k(s)ds, \quad t \geq 0, \quad k = 1, 2.$$

Osoita, että $\lim_{r\to\infty} \mathbb{E}(\hat{R}_k(t)) = R_k(t)$, missä r on henkilöiden lukumäärä havaintoaineistossa.