Geometria, erilliskoe to 17.11.2011, ratkaisut ja arvostelukommentit (kuvat sivulla 3).
Järjestäjä: Jouni Luukkainen (vastaanotot D319 ti 9–11 ja pe 9–10; laskupaja D337 to 14-16)

Teht. 1. Elementa. Piirrä suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta tämän suoran suuntainen suora.

Ohje. Kyseessä on Elementan lause I.31. Ratkaisussa saa käyttää Eukleideen postulaatteja P1–P4 ja Elementan lauseita I.1–I.28.

Ratk. Olkoon l suora ja P piste, jolla $P \notin l$. Valitaan suoralta l piste Q. Olkoon m suora $\overline{PQ}$. Olkoon α jokin suorien l ja m rajaamista kulmista. Siirretään Elementan lauseen I.23 nojalla kulma α pisteeseen P kulmaksi β niin, että kulman β toisena kylkenä on suora m ja että kulmat α ja β ovat samankohtaiset, toisin sanoen, joko suora m on niillä molemmilla vasempana kylkenä tai suora m on niillä molemmilla oikeana kylkenä. Olkoon suora n kulman β toinen kylki. Tällöin Elementan lauseen I.27 tai lauseen I.28 nojalla on $n \parallel l$. Ks. kuva sivulla 3.

Arvostelusta. Oli käytettävä harppia ja viivainta niin, että piirtämisen vaiheet olivat piirroksesta selvästi erotettavissa, ellei sitten näitä vaiheita selvitetty myös sanallisesti.

Teht. 2. Hilbertin aksioomat. Todista Paschin lause: ”Jos ABC on kolmio ja l suora, joka leikkaa sivua AB pisteiden A ja B välissä olevassa pisteessä, niin suora l leikkaa sivua AC tai sivua BC.”

Ohje: Todistuksessa voit käyttää tietoa, että jokainen suora rajaa täsmälleen kaksi puolitasoa ja että näillä puolitasoilla ei ole yhteisiä pisteitä. Muuten todistuksen tulee pohjautua Hilbertin aksioomeihin.

Tod. puolitasoin. Voidaan olettaa, että suora l välttää kärjet A, B ja C, sillä muutoin väite pätee triviaalisti.

Oletuksen mukaan sivu AB leikkaa suoran l, joten määritelmän mukaan pisteet A ja B ovat suoran l eri puolilla. Olkoot tällöin $\Pi_A \ni A$ ja $\Pi_B \ni B$ suoran l rajaamat eri puolitasot. Nyt on joko $C \in \Pi_A$ tai $C \in \Pi_B$. Voidaan olettaa, että $C \in \Pi_A$ (kuten kuvassa), jolloin siis $C \notin \Pi_B$. Täten pisteet B ja C ovat suoran l eri puolilla, joten määritelmän mukaan suora l leikkaa sivun BC.

Tod. aksiomein. Jos $l \cap AC = \emptyset$ ja $l \cap BC = \emptyset$, niin määritelmän mukaan piste A on samalla puolella suoraa l kuin piste C ja piste C on samalla puolella suoraa l kuin piste B, jolloin aksiooman B-4 (i) mukaan piste A on samalla puolella suoraa l kuin piste B, mutta tällöin määritelmän mukaan $l \cap AB = \emptyset$ vastoin oletusta.

Arvostelusta. Kyseessä on luennoilla todistettu tulos. Tehtävän sanamuodon perusteella sai olettaa sitä sanomatta, että $A, B \notin l$. Tapauksen $C \in l$ sivuuttaminen vei 1 p. Aksiooman B-4 (ii) käyttö aksiooman B-4 (i) sijasta vei 1 p.

Teht. 3. Hyperbolinen geometria. Tarkastellaan hyperbolista geometriaa. Olkoon $\triangle ABC$ suorakulmainen tasakylkinen kolmio. Yhdistetään suoran kulman kärki B vastaisen sivun keskipisteeseen D. Osoita, että $|BD| < |AD|$.

Ratk. Kolmiot $\triangle ABD$ ja $\triangle CBD$ ovat yhtenevät (Elementan lause I.8: S-S-S), joten $\angle ABD = \angle CBD$ ja $\angle ADB = \angle CDB$ eli siis $\angle ABD = R/2$ sekä $\angle ADB = R$. Hyperbolisessa geometriassa kolmion kulmien summa on pienempi kuin $2R$, joten kolmiosta $\triangle ABD$ saadaan, että $\angle A < R/2$. Täten $\angle A < \angle ABD$. Väite $|BD| < |AD|$ seuraa nyt Elementan lauseesta I.19.

Teht. 4. Kartioleikkaukset. (a) Etsi paraabelin $y = 3x^2$ polttopiste ja johtosuora.

(b) Olkoot $P_1 = (x_1, 3x_1^2)$ ja $P_2 = (x_2, 3x_2^2)$ tämän paraabelin kaksi eri pistettä. Määritä paraabelin jänteen P_1P_2 yhtälö. Määritä lukujen x_1 ja x_2 avulla ehto sille, että jänne kulkee paraabelin polttopisteen kautta.

Ratk. (a) Tietysti paraabelin huippu ja akseli ovat piste $(0, 0)$ ja suora $x = 0$. Paraabelin polttopiste ja johtosuora ovat täten $(0, a)$ ja $y = -a$ luvulle $a > 0$, jolla paraabelin yhtälö on $x^2 = 4ay$. Koska $y = 3x^2 \iff x^2 = y/3$, ehto on $4a = 1/3$ eli $a = 1/12$. Vaihtoehtoisesti voitaisiin lähteä määritelmään eli siis paraabelin eksentrisyyteen $e = 1$ perustuvasta paraabelin yhtälöstä $|(x, 3x^2) - (0, a)| = 3x^2 + a$ eli $\sqrt{x^2 + (3x^2 - a)^2} = 3x^2 + a$: Neliöön korottamalla ja termi puolelta toiselle siirtämällä saataisiin

$$x^2 = (3x^2 + a)^2 - (3x^2 - a)^2 = 6x^2 \cdot 2a \iff 1 = 12a \iff a = 1/12.$$

Täten polttopiste on $\underline{(0, 1/12)}$ ja johtosuora $\underline{y = -1/12}$.

(b) Jänteen P_1P_2 kulmakerroin on $\dfrac{3x_1^2 - 3x_2^2}{x_1 - x_2} = 3(x_1 + x_2)$ ja yhtälö siis

$$y - 3x_1^2 = 3(x_1 + x_2)(x - x_1) \iff y - 3x_1^2 = 3(x_1 + x_2)x - 3x_1^2 - 3x_1x_2 \iff \underline{y = 3(x_1 + x_2)x - 3x_1x_2}.$$

Täten jänne P_1P_2 kulkee polttopisteen $(0, 1/12)$ kautta jos ja vain jos

$$\frac{1}{12} = 3(x_1 + x_2)0 - 3x_1x_2 \iff \underline{x_1x_2 = -\frac{1}{36}}.$$

Teht. 5. Affiini geometria. Etsi affiini kuvaus $t\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, joka vie hyperbelin $xy = 1$ hyperbeliksi $x^2 - 4y^2 = 1$.

Ratk. algebrallisesti. Havaitaan, että $x'^2 - 4y'^2 = 1 \iff (x' - 2y')(x' + 2y') = 1$. Siis se affiini kuvaus $t\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x', y') = t(x, y)$, jolle pätee $(x, y) = t^{-1}(x', y') = (x' - 2y', x' + 2y')$, vie hyperbelin $xy = 1$ hyperbeliksi $x'^2 - 4y'^2 = 1$. Koska

$$\begin{cases} x = x' - 2y' \\ y = x' + 2y' \end{cases} \iff \begin{cases} x' = (x + y)/2 \\ y' = (-x + y)/4, \end{cases}$$

niin $\underline{t(x, y) = ((x + y)/2, (-x + y)/4)}$ on vaadittu affiini kuvaus.

Ratk. geometrisesti. Hyperbelin H: $xy = 1$ huiput ovat $(1, 1)$ ja $(-1, -1)$ sekä keskipiste $(0, 0)$. Kierretään H origon ympäri hyperbeliksi niin, että huippu $(1, 1)$ menee positiiviselle x-akselille. Olkoon siis $t_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kierto kulman $-\pi/4$ verran origon ympäri, toisin sanoen muunnos

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = t_1(x, y) = \begin{bmatrix} \cos(-\pi/4) & -\sin(-\pi/4) \\ \sin(-\pi/4) & \cos(-\pi/4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x' = (x + y)/\sqrt{2} \\ y' = (-x + y)/\sqrt{2}. \end{cases}$$

Tällöin

$$(x', y') = t(x, y) \iff \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x = (x' - y')/\sqrt{2} \\ y = (x' + y')/\sqrt{2}. \end{cases}$$

Nyt

$$xy = 1 \iff \frac{1}{2}(x' - y')(x' + y') = 1 \iff \frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1.$$

Siis t_1H on hyperbeli H_1: $x^2/2 - y^2/2 = 1$.

Etsitään sitten affiini kuvaus $t_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, joka vie hyperbelin H_1 hyperbeliksi H_2: $x^2 - 4y^2 = 1$. Hyperbelin H_1 huiput ovat $(\pm\sqrt{2}, 0)$ ja hyperbelin H_2: $x^2 - 4y^2 = 1$ huiput taas $(\pm 1, 0)$. Vaaditaan, että t_2 on muotoa $t_2(x, y) = (\alpha x, \beta y)$ joillain $\alpha, \beta > 0$. Tällöin

$$(x', y') = t_2(x, y) \iff (x, y) = (x'/\alpha, y'/\beta).$$

On oltava $t_2(\sqrt{2}, 0) = (1, 0)$ eli $\alpha = 1/\sqrt{2}$. Vaaditaan, että t_2 vie hyperbelin H_1 asymptootit $y = \pm x$ hyperbelin H_2 asymptooteiksi $y = \pm x/2$. Tulee vaatimus, että suoran $y = x$ eli suoran $y'/\beta = x'/\alpha$ on oltava suora $y' = x'/2$ eli että $\beta/\alpha = 1/2$ eli $\beta = \alpha/2 = 1/2\sqrt{2}$. Siis on oltava $t_2(x, y) = (x/\sqrt{2}, y/2\sqrt{2})$. Toisaalta tällöin $(x, y) = (\sqrt{2}x', 2\sqrt{2}y')$, joten todellakin pätee, että $x^2/2 - y^2/2 = 1 \iff 2x'^2/2 - 8y'^2/2 = 1 \iff x'^2 - 4y'^2 = 1$ eli että $t_2H_1 = H_2$.

Näin olen $t = t_2 \circ t_1$ on vaadittu kuvaus, ja sille on

$$t(x, y) = t_2(t_1(x, y)) = t_2((x + y)/\sqrt{2}, (-x + y)/\sqrt{2}) = \underline{((x + y)/2, (-x + y)/4)}.$$