FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
KEVÄT 2011
LASKUHARJOITUS 9

1. Funktiot $f_0(t) := 1$, $f_1(t) := t$, $f_2(t) := t^2$ ja $f_3(t) := t^3$ muodostavat lineaarisesti riippumattoman jonon Hilbert-avaruudessa $E := L^2(0,1)$. Ortonormita tämä jono, eli muodosta avaruuden E ortonormaali jono $(e_j)_{j=0}^3$, jolle vektorien $f_0, \ldots, f_j$ virittämä E:n aliavaruus on sama kuin vektorien $e_0, \ldots, e_j$ virittämä aliavaruus, kaikilla j. (Jos laskut alkavat maistua puulta, riittää käsitellä kolme ensimmäistä vektoria, kunhan vain ajatus tulee selväksi!)

2. Tee sama, kun E korvataan Hilbert-avaruudella $L^2(-5,5)$.

3. a) Osoita, että funktio $f(x) = 1 + 2|x|$ kuuluu Sobolev–avaruuteen $H^1(-1,1)$.

b) Kuinka määrittelisit heikkojen osittaisderivaattojen käsitteen esim. kahden muuttujan funktioille $f : I^2 \to \mathbf{C}$, missä $I^2 =]0,1[\times]0,1[$? Oleta $f \in L^2(I^2)$.

4. Edelliseen liittyen, kuinka määrittelet Sobolev–avaruuden joukossa I^2, eli Sobolev–avaruuden $H^1(I^2)$? Osoita, että lauseke

$$(f|g) := \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\bar{g}(x,y)dxdy$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \frac{\partial \bar{g}(x,y)}{\partial x} dxdy + \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \frac{\partial \bar{g}(x,y)}{\partial y} dxdy$$

missä esiintyy heikkoja osittaisderivaattoja, on sisätulo Sobolev–avaruudessasi.

****

1. The functions $f_0(t) := 1$, $f_1(t) := t$, $f_2(t) := t^2$ ja $f_3(t) := t^3$ form a linearly independent sequence in the Hilbert space $E := L^2(0,1)$. Convert it into an orthonormal sequence, in other words, find an orthonormal $(e_j)_{j=0}^3$ sequence in E with the following property: the linear subspace spanned by $f_0, \ldots, f_j$ is the same as that spanned by $e_0, \ldots, e_j$, for all j. (Getting fed up with calculations, you may restrict to the first three vectors.)

2. Do the same in case of the Hilbert space $L^2(-5,5)$ as E.

3. a) Show that the function $f(x) = 1 + 2|x|$ belongs to the Sobolev space $H^1(-1,1)$.

b) How do you define weak partial derivatives for example in the case of the two variable function $f : I^2 \to \mathbf{C}$, where $I^2 =]0,1[\times]0,1[$? Assume that $f \in L^2(I^2)$.

4. In view of the previous problem, how do you define the Sobolev space $H^1(I^2)$ in the set I^2 ? Prove that the following expression, including weak derivatives, is an inner product in your Sobolev space:

$$(f|g) := \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 f(x,y)\bar{g}(x,y)dxdy$$

$$+ \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \frac{\partial \bar{g}(x,y)}{\partial x} dxdy + \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \frac{\partial \bar{g}(x,y)}{\partial y} dxdy.$$