FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
KEVÄT 2011
LASKUHARJOITUS 8

1. a) Laske funktioiden $f(x) = x$ ja $g(x) = x(2\pi - x)$ Fourier–kertoimet. (Tässä $x \in [0, 2\pi]$ ja $f,\, g \in L^2(0, 2\pi)$.) Mitä voi havaita kertoimien suppenemisnopeudesta?
b) Olkoon $f \in L^2(0, 2\pi)$ ja $P(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}$ trigonometrinen polynomi, missä kertoimet $a_k$ ovat siis reaali- tai kompleksilukuja. Laske (konvoluutio)funktion

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(x-t) f(t) dt$$

Fourier–kertoimet $\hat{g}(m)$, $m \in \mathbf{Z}$ lukujen $a_k$ ja $f$:n Fourier-kertoimien avulla.

2. Olkoon $f \in L^2(0, 2\pi)$ ja oletetaan, että sen Fourier–kertoimet toteuttavat $\sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty$. Osoita, että $f : [0, 2\pi] \to \mathbf{K}$ on jatkuva funktio (ekvivalenssiluokka $L^2$:ssa sisältää jatkuvan edustajan).

3. Olkoon $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $2\pi$–periodinen funktio, eli $f(x) = f(2\pi + x)$ kaikilla $x$. Osoita:

$(i)$ Jos $f$ on $k$ kertaa jatkuvasti derivoituva, niin $|\hat{f}(n)| \leq C(1 + |n|)^{-k}$ kaikilla $n \in \mathbf{Z}$.

$(ii)$ Jos $f \in L^2(0, 2\pi)$ ja $|\hat{f}(n)| \leq C(1 + |n|)^{-k-2}$ kaikilla $n \in \mathbf{Z}$, niin $f$ on $k$ kertaa jatkuvasti derivoituva.

Tässä $k \in \mathbf{N}$ ja $C > 0$ on vakio. Vihje. Osittaisintegrointi Fourier-kertoimien kaavassa.

4. Osoita, että funktio $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $f(x) := e^{-1/(1-|x|^2)}$, kun $|x| < 1$, $f(x) = 0$, kun $|x| \geq 1$, on $C^\infty$, eli mielivaltaisen monta kertaa jatkuvasti derivoituva.

**************************************************************************************

1. a) Calculate the Fourier-coefficients of the functions $f(x) = x$ and $g(x) = x(2\pi - x)$. Here $x \in [0, 2\pi]$ ja $f,\, g \in L^2(0, 2\pi)$.) Consider the rate of the convergence of these series.
b) Let $f \in L^2(0, 2\pi)$ ja $P(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}$ be a trigonometric polynomial with $a_k \in \mathbf{R}$ or $\mathbf{C}$. Calculate the Fourier-coefficients $\hat{g}(m)$, $m \in \mathbf{Z}$ of the convolution function

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(x-t) f(t) dt$$

in terms of the numbers $a_k$ ja $\hat{f}(k)$.

2. Let $f \in L^2(0, 2\pi)$ and assume $\sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty$. Prove that $f : [0, 2\pi] \to \mathbf{K}$ is continuous (its equivalence class in $L^2$ contains a continuous function).

3. Let $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ satisfy $f(x) = f(2\pi + x)$ for all $x \in \mathbf{R}$. Show the following:

$(i)$ If $f$ is $k$ times continuosly differentiable, then $|\hat{f}(n)| \leq C(1 + |n|)^{-k}$ for all $n \in \mathbf{Z}$.

$(ii)$ If $f \in L^2(0, 2\pi)$ and $|\hat{f}(n)| \leq C(1+|n|)^{-k-2}$ for all $n \in \mathbf{Z}$, then $f$ is $k$ times continuously differentiable.

Here $k \in \mathbf{N}$ and $C > 0$ is constant. You may use integration by parts.

4. Prove that the function $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $f(x) := e^{-1/(1-|x|^2)}$, for $|x| < 1$, $f(x) = 0$, for $|x| \geq 1$, belongs to $C^\infty$, i.e it is arbitrarily many times differentiable.