FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
KEVÄT 2011
LASKUHARJOITUS 7

1. Olkoon E Hilbert–avaruus $L^2([0,2\pi])$ ja $g(t) := t$, $t \in [0,2\pi]$. Määrää funktion g *Fourier–kertoimet* kannan $(e_n)_{n=-\infty}^{\infty}$,

$$e_n := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int},$$

suhteen, eli luvut $a_n := (g|e_n)$. Totea, että pätee $\|g\|_2 = \Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2\Big)^{1/2}$.

2. Osoita, että Legendren polynomit

$$p_n(t) := \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n}\Big((t^2-1)^n\Big) \quad , \quad n \in \mathbf{N},$$

muodostavat ortonormaalin jonon avaruudessa $L^2([-1,1])$.

3. Tarkastellaan Hilbert–avaruutta $L^2([-3,3])$, normina $\|f\|_2 := (\int_{-3}^{3} |f(t)|^2 dt)^{1/2}$. Olkoon M aliavaruus

$$M := \{f \in L^2([-3,3]) \mid f(t) = 0 \text{ melkein kaikilla } t \in [0,3]\}.$$

Etsi ortogonaalinen projektio $L^2([-3,3])$:lta M:lle.
Olkoon N 1–ulotteinen aliavaruus, jonka virittää vakiofunktio 1. Esitä integraalikaava N:n ortogonaaliselle projektiolle.

4. Kuten luennoilla kerrottiin, Banach avaruuden X rajoitettu lineaarinen operaattori $P : X \to X$ on projektio, jos $P^2 (:= P \circ P) = P$. Tarkemmin, tällainen operaattori on projektio aliavaruudelle Y, kun $Y := P(X)$. Tällöin pätee $X = Y \oplus Z$, missä $Z := \ker(P) := \{x \in X \mid Px = 0\}$. (Sanotaan, että Z on Y:n *komplementti*.)
Etsi jokin projektio Banach–avaruudelta $C(-2,2)$
a) yksiulotteiselle aliavaruudelle Y, jonka virittää vakiofunktio 1,
b) yksiulotteiselle aliavaruudelle Y, jonka virittää funktio e^{t^2},
c) aliavaruudelle

$$Y := \{f \in C(-2,2) \mid f(t) = -f(-t) \ \forall t \in [-2,0]\},$$

d) aliavaruudelle

$$Y := \{f \in C(-2,2) \mid f(1) = 0\},$$

e) aliavaruudelle

$$Y := \{f \in C(-2,2) \mid f(1) = f(-1) = 0\}.$$

Huomaa, että tulee todeta, että operaattorit ovat lineaarisia ja rajoitettuja. Pystytkö esittämään a)– ja b)–kohtiin useita eri vastauksia ? Huomaa, kuinka komplementti Z riippuu projektion valinnasta.

****

1. Let E be the Hilbert space $L^2([0,2\pi])$ ja $g(t) := t$, $t \in [0,2\pi]$. Calculate the Fourier–coefficients of the function g with respect to the basis $(e_n)_{n=-\infty}^{\infty}$,

$$e_n := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int},$$

i.e., the numbers $a_n := (g|e_n)$. Show that $\|g\|_2 = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2}$.

2. Prove that the Legendre polynomials

$$p_n(t) := \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n}\Big((t^2-1)^n\Big) \quad , \quad n \in \mathbf{N},$$

form an orthonormal sequence in the space $L^2([-1,1])$.

3. Consider the Hilbert space $L^2([-3,3])$ with the norm $\|f\|_2 := (\int_{-3}^{3} |f(t)|^2 dt)^{1/2}$. Let M be the subspace

$$M := \{f \in L^2([-3,3]) \mid f(t) = 0 \text{ for a.e. } t \in [0,3]\}.$$

Find the orthogonal projection from $L^2([-3,3])$ onto M.
Let N be the one dimensional subspace spanned by the constant function 1. Write down the integral formula for the orthogonal projection onto N.

4. Let X be a Banach space. A bounded linear operator $P : X \to X$ is a projection, if $P^2 (:= P \circ P) = P$. More precisely, this operator is a projection onto the subspace Y, where $Y := P(X)$. We have $X = Y \oplus Z$, where $Z := \ker(P) := \{x \in X \mid Px = 0\}$. ($Z$ is a *complement* of Y.)
Find some projection from $C(-2,2)$ onto
a) the one–dimensional subspace Y spanned by the constant function 1,
b) the one–dimensional subspace Y spanned by the constant function e^{t^2},
c) the subspace

$$Y := \{f \in C(-2,2) \mid f(t) = -f(-t)\ \forall t \in [-2,0]\},$$

d) the subspace

$$Y := \{f \in C(-2,2) \mid f(1) = 0\},$$

e) the subspace

$$Y := \{f \in C(-2,2) \mid f(1) = f(-1) = 0\}.$$

It is necessary to prove that the operators are bounded and linear. Can you find more than one example in the cases a) and b). The complement Z depends on the choice of the projection.