FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
KEVÄT 2011
LASKUHARJOITUS 6

Seuraavissa tehtävissä on Hölderin epäyhtälöstä epäilemättä hyötyä.

1. a) Osoita, että jos Ω on avoin ja rajoitettu $\mathbf{R}^n$:n osajoukko, niin kaikilla $1 \le p < q < \infty$ pätee

$$L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega). \tag{1}$$

b) Millä parametrien α, $0 < \alpha < \infty$, ja p, $1 \le p < \infty$, arvoilla pätee funktiolle $f(x) = |x|^{-\alpha}$, $x \in [-1, 1]$,

$$f \in L^p([-1, 1]) \ ? \tag{2}$$

Ratkaise sama tehtävä myös tapauksessa, että väli $[-1, 1]$ korvataan tason origokeskisellä yksikkökiekolla, ja $|x|$ tarkoittaa tason vektorin x pituutta.

c) Millä parametrien β, $0 < \beta < \infty$, ja p, $1 \le p < \infty$, arvoilla pätee funktiolle $g(x) = (1 + |x|)^{-\beta}$, $x \in \mathbf{R}$, että $g \in L^p(\mathbf{R})$?

2. Osoita, että singulaarinen integraalioperaattori

$$Tf(x) = \int\limits_{\mathbf{R^2}} \frac{e^{-|x|-|y|}}{|x-y|} f(y)dy \tag{3}$$

on rajoitettu operaattori $L^\infty(\mathbf{R}^2) \to L^p(\mathbf{R}^2)$ kaikilla $1 \le p < \infty$. (Kaavassa (3), x ja y ovat $\mathbf{R}^2$:n alkioita, ja $|x|$ on vektorin pituus $\mathbf{R}^2$:ssä, tietty.)

3. Jos A on normiavaruuden E osajoukko, sanomme, että $x \in A$ on *normin minimoiva alkio*, mikäli

$$\|x\| = \inf\{\|y\| \mid y \in A\}.$$

Osoita, että $A := \{f \in C(-5, 5) \mid f(0) = 1\}$ on avaruuden $C(-5, 5)$ suljettu ja konveksi osajoukko, jossa on äärettömän monta normin minimoivaa alkioita.

4. Osoita, että

$$A := \Big\{ f \in C(0, 1) \mid f(0) = 0 \text{ ja } \int\limits_0^1 f(t)dt = 1 \Big\}$$

on avaruuden $C(0, 1)$ suljettu ja konveksi osajoukko, jossa ei ole lainkaan normin minimoivaa alkiota. Ohje. Tarkastele ensin vaikkapa sellaisia funktioita $f \in A$, joille $f(t) \ge 0$ kaikilla $t \in [0, 1]$. Havaitse, että näiden f normien infimum on 1, jne.

****

You may use the Hölder inequality in the following.

1. a) Assume Ω is a bounded and open subset of $\mathbf{R}^n$. Prove that for all $1 \le p < q < \infty$ we have

$$L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega). \tag{1}$$

b) For which values of α, $0 < \alpha < \infty$, and p, $1 \le p < \infty$, the function $f(x) = |x|^{-\alpha}$, $x \in [-1, 1]$, satisfies

$$f \in L^p([-1, 1]) \ ? \tag{2}$$

The same when $[-1, 1]$ is replaced by the unit disc of the plane with center 0, $|x|$ denotes the length of the vector x in the plane.

c) For which values of β, $0 < \beta < \infty$, and p, $1 \le p < \infty$, the function $g(x) = (1 + |x|)^{-\beta}$, $x \in \mathbf{R}$, satisfies $g \in L^p(\mathbf{R})$?

2. Show that the singular integral operator

$$Tf(x) = \int\limits_{\mathbf{R}^2} \frac{e^{-|x|-|y|}}{|x-y|} f(y)dy \tag{3}$$

is a bounded operator $L^\infty(\mathbf{R}^2) \to L^p(\mathbf{R}^2)$ for every $1 \le p < \infty$. (In (3), x and y belong to $\mathbf{R}^2$, $|x|$ denotes the length of $x \in \mathbf{R}^2$.)

3. If A is a subset of the normed space E, we say that the element $x \in A$ *minimizes the norm (of A)*, if

$$\|x\| = \inf\{\|y\| \mid y \in A\}.$$

Prove that $A := \{f \in C(-5, 5) \mid f(0) = 1\}$ is a closed and convex subset of $C(-5, 5)$, which has infinitely many elements minimizing the norm of A.

4. Prove that

$$A := \Big\{ f \in C(0, 1) \mid f(0) = 0 \text{ ja } \int\limits_0^1 f(t)dt = 1 \Big\}$$

is a closed and convex subset of $C(0, 1)$ which does not have an element minimizing its norm. Instruction. Consider first functions $f \in A$ with the property $f(t) \ge 0$ for all $t \in [0, 1]$. Notice that for these f, the infimum of their norm equals 1, and so on.