FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
KEVÄT 2011
LASKUHARJOITUS 5

1. "Ratkaise" yhtälöt

a) $x = \frac{1}{2} + e^{-x^2}$,

b) $\sin(x) + 10x - 5 = 0$,

missä $x \in \mathbf{R}$; toisin sanoen osoita, että yhtälöillä on jollain sopivalla suljetulla välillä yksikäsitteinen ratkaisu ja esitä, miten ratkaisua voidaan approksimoida.
c) Osoita, että integraaliyhtälöllä

$$\int_0^1 \frac{1}{2+|t-s|} f(s)ds + \sin t + f(t) = 0 \quad , \quad t \in [0,1],$$

on yksikäsitteinen ratkaisu (välillä $[0,1]$ jatkuva funktio f).

2. Osoita, että integraaliyhtälöllä

$$f(t) + 2e^{-t^2} + \int_{-5}^{5} e^{-100|t|-100|s|} f(s)^2 ds = 0$$

on ratkaisu avaruudessa $C(-5,5)$. Opastus. Tarvitaan pientä laskuteknistä trikkiä. Lisäksi on olennaista havaita, että tämä yhtälö on ei-lineaarinen: siellä esiintyy tuntemattoman funktion polynomi. Tällöin kontraktiivisuus ei yleensä päde koko Banach-avaruudessa, vaan esimerkiksi sopivassa origokeskisessä pallossa (joukko D kiintopistelauseessa).

3. Banachin kiintopistelauseesta on olemassa monia johdannaisia. Todista seuraava: Olkoon D Banach–avaruuden X suljettu osajoukko, ja $F : D \to D$. Oletetaan, että F^n on kontraktio jollakin $n \in \mathbf{N}$. Silloin F:llä on yksikäsitteinen kiintopiste joukossa D. (Tässä F^n on yhdistetty kuvaus, määritelmä induktiolla $F^n = F \circ F^{n-1}$)

4. Olkoot $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$, $a < b$ ja olkoon $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbf{R}$ on jatkuva. Tarkastellaan operaattoria

$$Ff(t) := \int_a^t K(t,s) f(s) ds$$

missä $f \in C(a,b)$ ja $t \in [a,b]$. Osoita, että F^n on kontraktio $C(a,b)$:ssä jollekin n (vaikka $|K(t,s)|$ ei olisikaan pieni! Todistus perustuu havaintoon, että kun laskee esim. vakion 1 *määräämättömän* integraalin n kertaa peräkkäin, tulokseen tulee tekijä $1/n!$ polynomien integroimiskaavan seurauksena.).

Tarkastele tämän valossa Volterran integraaliyhtälön

$$f(t) = \int_0^t e^{-t^2+s^2} f(s)ds + 100e^t$$

ratkaisemista, kun f on määritelty välillä $[0, 100] \subset \mathbf{R}$.

****

1. "Solve" the equations

a) $x = \frac{1}{2} + e^{-x^2}$,

b) $\sin(x) + 10x - 5 = 0$,

where $x \in \mathbf{R}$; in other words, prove that the equations have unique solutions and show how these solutions can be approximated.
c) Show that the integral equation

$$\int_0^1 \frac{1}{2 + |t - s|} f(s)ds + \sin t + f(t) = 0 \quad , \quad t \in [0, 1],$$

has a unique solution, which is a continuous function f on the interval $[0, 1]$.

2. Show that the integral equation

$$f(t) + 2e^{-t^2} + \int_{-5}^{5} e^{-100|t|-100|s|} f(s)^2 ds = 0$$

has a solution in the space $C(-5, 5)$. Hint. You will need a small technical computational trick. Moreover, note that it is a nonlinear problem. Thus contractivity in general does not hold in the whole Banach space. Take instead a ball with center 0 for your set D in the fixed point theorem.

3. Banach fixed point theorem can be varied in many ways. Prove the following:
Let D be a closed subset of the Banach space X, and let $F : D \to D$. Assume that F^n is a contraction for some $n \in \mathbf{N}$. Then F has a unique fixed point. (Here $F^n = F \circ F^{n-1}$, defined by induction.)

4. Let $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$, $a < b$ and assume $K : [a, b] \times [a, b] \to \mathbf{R}$ continuous. Consider the operator

$$Ff(t) := \int_a^t K(t, s)f(s)ds$$

where $f \in C(a,b)$ and $t \in [a,b]$. Prove that F^n is a contraction in $C(a,b)$ for some n (though $|K(t,s)|$ may cease to be small! You should use the observation that calculating the *indefinite* integral of the constant 1 repeatedly n times, a factor $1/n!$ appears, due just to the integration formula for polynomials.)
Apply this to the Volterra integral equation

$$f(t) = \int_0^t e^{-t^2+s^2} f(s)ds + 100e^t,$$

where f is defined on the interval $[0,100] \subset \mathbf{R}$.