FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
KEVÄT 2011
LASKUHARJOITUS 4

1. Kun a ja b ovat reaalilukuja, joille $a < b$, merkitään tuttuun tapaan

$$C(a,b) := \{f : [a,b] \to \mathbf{R} \text{ jatkuva} \mid \|f\|_\infty := \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|\}.$$

Tarkastellaan kompositio–operaattoreita $C_\varphi : f \mapsto f \circ \varphi$, missä φ on jokin jatkuva reaaliarvoinen reaalimuuttujan funktio. Kun

$$\varphi(t) := t^2,$$

osoita, että $C_\varphi : C(0,1) \to C(-1,1)$ on hyvin määritelty ja jatkuva operaattori ko. avaruuksien välillä (lineaarisuuden voi olettaa tunnetuksi). Miksi C_φ ei ole surjektio?
Edelleen, olkoon $\psi(t) := \frac{1}{2}t$. Osoita, että $C_\psi : C(0,1) \to C(0,1)$ ei ole injektio. Onko C_φ injektio?

2. Olkoon seuraavassa kerroinkuntana $\mathbf{R}$. Tarkastellaan ("siirto"-)operaattoreita $S : \ell^2 \to \ell^2$ ja $T : \ell^2 \to \ell^2$,

$$S : (x_n)_{n=1}^\infty \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \ldots) \quad , \qquad T : (x_n)_{n=1}^\infty \mapsto (x_{n+1})_{n=1}^\infty.$$

Ne ovat hyvin määriteltyjä jatkuvia lineaarioperaattoreita. Avaruuden ℓ^2 suljettu vektorialiavaruus M on *invariantti* (operaattorille S), jos $S(M) \subset M$ eli jos S kuvaa jokaisen M:n alkion joukkoon M. Vastaavasti tietenkin operaattorille T.
Etsi invariantteja aliavaruuksia, erikseen kummankin operaattorin tapauksessa.
Vektori $x \in \ell^2$, $x \neq \bar{0}$, on operaattorin T *ominaisvektori ominaisarvolla* $\lambda \in \mathbf{R}$, jos

$$Tx = \lambda x.$$

Etsi joitakin ominaisarvoja ja ominaisvektoreita T:lle.
Huomautuksia. 1) Yllä mainitut jutut, erityisesti ominaisarvojen teoria, toimivat kunnolla oikeastaan tapauksessa $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.
2) Ominaisvektori(e)n virittämä aliavaruus on aina invariantti!
3) Ei tarvitse esittää todistuksia sille, että joku aliavaruus on suljettu. Perusteltu arvaus riittää. Esimerkiksi jokainen äärellisulotteinen aliavaruus on suljettu.

3. Olkoon $(E, \|\cdot\|)$ Banach-avaruus, ja olkoon p jokin toinen normi E:ssä, joka on ekvivalentti normin $\|\cdot\|$ kanssa. Onko normiavaruus (E,p) aina täydellinen?
Onko avaruus $C(0,1)$ varustettuna normilla

$$|||f||| := \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| + \int_0^1 |f(t)|t$$

täydellinen?

4. Kiinnitetään $0 < \alpha < 1$, ja olkoon Lip_α sellaisten funktioiden $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ joukko, joille

$$\|f\|_\alpha = |f(0)| + \sup_{s \neq t} \frac{|f(s) - f(t)|}{|s-t|^\alpha} < \infty$$

Näytä aluksi, että Lip_α on vektoriavaruus ja että $\|\cdot\|_\alpha$ on normi. Osoita sen jälkeen, että $(Lip_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ on Banachin avaruus. (Huomaa että

$$|f(s) - f(t)| \leq \|f\|_\alpha |s-t|^\alpha$$

kaikilla $s, t \in [0,1]$, $f \in Lip_\alpha$. Sanotaan usein, että f Hölder-jatkuva potenssilla α, tai f on kertaluvun α Lipschitz-funktio.)

****

1. For the real numbers a, b, $a < b$, denote

$$C(a,b) := \{f : [a,b] \to \mathbf{R} \text{ continuous} \mid \|f\|_\infty := \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|\}.$$

Consider the composition operator $C_\varphi : f \mapsto f \circ \varphi$, where φ is a continuous real valued function of a real variable. Let

$$\varphi(t) := t^2,$$

and show that $C_\varphi : C(0,1) \to C(-1,1)$ is well defined and continuous operator in the given spaces (linearity is obvious). Why is C_φ not a surjection?
Let $\psi(t) := \frac{1}{2}t$. Prove that $C_\psi : C(0,1) \to C(0,1)$ is not an injection. Is C_φ an injection?

2. Let $\mathbf{R}$ be the scalar field. Consider the shift and backward shift operators $S : \ell^2 \to \ell^2$ and $T : \ell^2 \to \ell^2$,

$$S : (x_n)_{n=1}^\infty \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \ldots) \quad , \qquad T : (x_n)_{n=1}^\infty \mapsto (x_{n+1})_{n=1}^\infty.$$

They are linear and bounded operators. The closed (linear) subspace M of ℓ^2 is *invariant* (for the operator S), if $S(M) \subset M$, or, S maps any element of M into M. The same for T.
Give examples of some invariant subspaces, separately for both operators.
The vector $x \in \ell^2$, $x \neq \bar{0}$, is an *eigenvector with eigenvalue* $\lambda \in \mathbf{R}$ for the operaator T, if

$$Tx = \lambda x.$$

Give examples of some eigenvectors and eigenvalues for T.
Remarks. 1) The things above actually work properly only in case $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.
2) The subspace spanned by eigenvector(s) is always invariant.
3) You do not need to worry for closedness-proofs for your subspaces. For example, a finite dimensional subspace is always closed.

3. Let $(E, \|\cdot\|)$ be a Banach space, and let p be another norm in E, which is equivalent to $\|\cdot\|$. Is the space (E, p) always complete?
Is the space $C(0,1)$ endowed with the norm

$$|||f||| := \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| + \int_0^1 |f(t)|t$$

complete?

4. Fix $0 < \alpha < 1$, and let Lip_α be the space of functions $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ satisfying

$$\|f\|_\alpha = |f(0)| + \sup_{s\neq t} \frac{|f(s) - f(t)|}{|s-t|^\alpha} < \infty$$

Prove that Lip_α is a vector space and that $\|\cdot\|_\alpha$ is a norm. Prove then that $(Lip_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ is a Banach space. (Notice that

$$|f(s) - f(t)| \leq \|f\|_\alpha |s-t|^\alpha$$

for all $s, t \in [0,1]$, $f \in Lip_\alpha$.)