FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
KEVÄT 2011
LASKUHARJOITUS 3

1. Olkoon $1 \leq p < \infty$. Osoita, että avaruuden ℓ^p suljettu yksikköpallo ei ole kompakti: etsi jono $(x^{(k)})_{k=1}^{\infty}$avaruuden ℓ^p alkiota, jolla ei ole suppenevaa osajonoa ja lisäksi pätee $\|x^{(k)}\|_p \leq 1$.

2. Tutki, ovatko seuraavat kuvaukset lineaarisia, hyvin määriteltyjä, rajoitettuja operaattoreita annetusta normiavaruudesta E normiavaruuteen F.

a) $M_a : (x_k)_{k=1}^{\infty} \mapsto (a_k x_k)_{k=1}^{\infty}$, missä $a_k := 1 + k^{-2}$ sekä $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in E := F := \ell^2$.

b) $S : (x_k)_{k=1}^{\infty} \mapsto (a_k x_{k+1})_{k=1}^{\infty}$, missä
(i) $a_k := k^{-1}$, sekä $E := \ell^2$, $F := \ell^1$.
(ii) $a_k := k^{-1/2}$, sekä $E := \ell^5$, $F := \ell^2$.

3. Määritellään kuvaus T,

$$T : f(t) \mapsto \int_0^1 e^t s f(s) ds,$$

missä $f \in C(0,1)$, ja $t \in [0,1]$ on muuttuja. Osoita, että T on hyvin määritelty rajoitettu lineaarikuvaus $C(0,1) \to C(0,1)$.

4. Olkoon E normiavaruus ja $M \subset E$ sen vektorialiavaruus. (Siis M:n alkioiden lineaarikombinaatio on edelleen M:n alkio.) Oletetaan, että M on aito aliavaruus, eli $M \neq E$. Osoita, että M ei voi olla avoin E:n osajoukko.
Opastus. Tarkastele pistettä $0 \in M$; ota jokin vektori $z \in E \setminus M$. Muokkaa z:sta vektori, joka kuuluu mielivaltaiseen, ennalta annettuun 0:n ympäristöön, mutta ei ole edelleenkään M:n alkio.

****

1. Let $1 \leq p < \infty$. Prove that the closed unit ball of ℓ^p is not compact: find a sequence $(x^{(k)})_{k=1}^{\infty} \subset \ell^p$ without a convergent subsequence, satisfying in addition $\|x^{(k)}\|_p \leq 1$.

2. Are the following mappings well-defined bounded linear operators from E into F (both normed spaces).

a) $M_a : (x_k)_{k=1}^{\infty} \mapsto (a_k x_k)_{k=1}^{\infty}$, where $a_k := 1 + k^{-2}$ and $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in E := F := \ell^2$.

b) $S : (x_k)_{k=1}^{\infty} \mapsto (a_k x_{k+1})_{k=1}^{\infty}$, where
(i) $a_k := k^{-1}$, and $E := \ell^2$, $F := \ell^1$.

(ii) $a_k := k^{-1/2}$, and $E := \ell^5$, $F := \ell^2$.

3. Let us define the mapping T,

$$T : f(t) \mapsto \int_0^1 e^t s f(s) ds,$$

where $f \in C(0,1)$, and $t \in [0,1]$ is a variable. Show that T is a well defined bounded linear mapping $C(0,1) \to C(0,1)$.

4. Let E be a normed space $M \subset E$ its linear subspace which is not the whole space. Prove that M cannot be an open subset of E.
Hint. Consider the point $0 \in M$; take a vector $z \in E \setminus M$. Modify this z such that it belongs to a given neighbourhood of 0, but is still not in M.