FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
KEVÄT 2011
LASKUHARJOITUS 2

1. Osoita, että avaruuden $\mathbf{R}^n$ normit

$$\|x\|_1 := \sum_{j=1}^{n} |x_j| \quad \text{ja} \quad \|x\|_\infty := \sup_{j=1,\ldots,n} |x_j| \tag{1}$$

ovat ekvivalentit, kun $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Osoita sitten, että itse asiassa kaikki normit

$$\|x\|_p := \Big(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\Big)^{1/p} \quad , \; 1 < p < \infty, \tag{2}$$

ovat ekvivalentteja esim. normin $\|\cdot\|_1$ kanssa.

2. Olkoon $1 \leq p < q \leq \infty$. Näytä, että $\|x\|_q \leq \|x\|_p$, kun $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^p$. Päättele tästä, että $\ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^q \subset c_0$. (Vihje. Tutki aluksi sellaista jonoa $x \in \ell^p$, jolle $\|x\|_p = 1$.)

3. Olkoon $\mathbf{R}_0^+ := [0, \infty[$, $I := [0,1]$, ja olkoon $w : I \to \mathbf{R}_0^+$ jatkuva funktio, jolla on enintään äärellinen määrä nollakohtia välillä I. Osoita, että lauseke

$$\|f\|_w := \sup_{t \in I} w(t)|f(t)| \tag{3}$$

määrittelee normin avaruudessa $C(0,1)$. (Huomaa, että jos $w(t) = 1$ kaikilla $t \in I$, saadaan tavanomainen sup-normi.) Onko tämä normi ekvivalentti sup-normin kanssa seuraavissa tapauksissa:
a) $w(t) = 1 + \sin t$,
b) $w(t) = t$,
c) $w(t) = t^2$.
Ovatko tapaukset b) ja c) keskenään ekvivalentteja?

4. Osoita, että rajoitettujen jonojen avaruus ℓ^∞, varustettuna sup-normilla, ei ole separoituva. Ohje. Voit käyttää tietoa, että $\mathbf{N}$:n osajoukkojen A muodostama potenssijoukko $P(\mathbf{N})$ on ylinumeroituva. Tarkastele ℓ^∞:n alkioita muotoa x_A, jolle pätee: n:s koordinaatti on 1, jos $n \in A$, ja 0, jos $n \notin A$.

****

1. Show that the norms in (1) are equivalent in $\mathbf{R}^n$; here $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Then show that all norms (2) are equivalent for example with the norm $\|\cdot\|_1$.

2. Let $1 \leq p < q \leq \infty$. Prove first that $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ for $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^p$, and then deduce from this that $\ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^q \subset c_0$. (Instruction. You should first consider a sequence $x \in \ell^p$ such that $\|x\|_p = 1$.)

3. Let $\mathbf{R}_0^+ := [0, \infty[$, $I := [0, 1]$ and let the function $w : I \to \mathbf{R}_0^+$ be continuous and possess at most a finite number of zeros on the interval I. Prove that the expression

$$\|f\|_w := \sup_{t \in I} w(t)|f(t)| \tag{3}$$

is a norm in the space $C(0, 1)$. (Notice that if $w(t) = 1$ for $t \in I$, then the norm coincides with the usual sup-norm.) Is the new norm equivalent with the sup-norm in the following cases:
a) $w(t) = 1 + \sin t$,
b) $w(t) = t$,
c) $w(t) = t^2$.
Are the cases b) and c) mutually equivalent?

4. Show that the space ℓ^∞ endowed with the sup-norm, is not separable. Hint. You may use the fact that the power set $P(\mathbf{N})$ consisting of all subsets A of $\mathbf{N}$:n is uncountable. Use elements $x_A \in \ell^\infty$ which satisfy: the nth coordinate equals 1, if $n \in A$, and 0, if $n \notin A$.