FUNKTIONAALIANALYYSI
KEVÄT 2011
LASKUHARJOITUS 1

1. Ovatko seuraavat reaaliarvoiset funktiot $p : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ normeja? Ovatko ne seminormeja? ($x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$)

a) $p(x) := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, b) $p(x) := |x_1| + 2|x_2| + 5|x_3|$, c) $p(x) := 5|x_1 - x_2| + 2|x_3|$,

d) $p(x) := |x_1 + 2x_2| + |x_1 - 2x_2| + |x_3|$.

2. Suppeneeko jono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ avaruudessa $C(0,1)$ (suljetun välin $[0,1]$ jatkuvien funktioiden avaruus varustettuna tavanomaisella sup–normillaan), kun $f_n := f_n(t)$, $t \in [0,1]$ on

a) $(1-t)^n$, b) $\frac{1}{n}\cos(nt)$, c) $\sin(nt)$?

Avaruudessa $C(0,1)$ myös lauseke

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|dt \tag{1}$$

määrittelee normin. Suppenevatko jonot a)–c) tämän normin mielessä?

3. Onko avaruuden $(C(0,1), \|\cdot\|_\infty)$ osajoukko

$$X := \{f \in C(0,1) \mid f(t) = 0 \ \forall t \in [0,1/2]\}$$

tiheä, eli voidaanko jokaista $C(0,1)$:n alkiota approksimoida X:n alkioilla mielivaltaisella tarkkuudella? (Vastaus: eipä tietenkään; etsi joku $C(0,1)$:n alkio f, jolle $\|f-g\|_\infty \geq 1$ kaikilla $g \in X$.)

4. Olkoon E normiavaruus, kerroinkuntana $\mathbf{R}$. Osoita, että kuvaukset $\psi : E \times E \to E$, $\psi : (x,y) \mapsto x+y$ ja $\phi : \mathbf{R} \times E \to E$, $\phi : (\lambda, y) \mapsto \lambda y$ ovat jatkuvia.
(Jatkuvuuden osoittamiseksi kuvaukselle ψ riittää esimerkiksi näyttää, että $x_n + y_n \to x + y$, kun $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ja $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ ovat sellaisia jonoja avaruudessa E, että $x_n \to x$ ja $y_n \to y$, kun $n \to \infty$. Vastaavasti kuvaukselle ϕ.)

****

1. Do the following real valued functions $p : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ satisfy the definition of the norm? What about the seminorm? ($x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$; see above for the functions p)

2. Does the sequence $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge in the space $C(0,1)$ (which consists of continuous functions on $[0,1]$ and is endowed with the usual sup-norm) for $f_n := f_n(t)$, $t \in [0,1]$ given in a)-c) above?

The expression (1) also defines another norm in the space $C(0,1)$. Consider the convergence of the sequences a)-c) with respect to this norm.

3. Is the subset

$$X := \{f \in C(0,1) \mid f(t) = 0 \ \forall t \in [0,1/2]\}$$

dense in the space $(C(0,1), \|\cdot\|_\infty)$, in other words, can any element of $C(0,1)$ be approximated arbitrarily well by an element of X? (Answer: of course not; find a function $f \in C(0,1)$ such that $\|f - g\|_\infty \geq 1$ for all $g \in X$.)

4. Let E be a normed space with conefficient field $\mathbf{R}$. Prove that the mappings $\psi : E \times E \to E$, $\psi : (x,y) \mapsto x + y$ and $\phi : \mathbf{R} \times E \to E$, $\phi : (\lambda, y) \mapsto \lambda y$ are continuous.
(In case of ψ it is enough for example to show that $x_n + y_n \to x + y$, if $(x_n)_{n=1}^\infty$ ja $(y_n)_{n=1}^\infty$ are sequences in E satisfying $x_n \to x$ and $y_n \to y$, as $n \to \infty$. The same for ϕ.)