FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
KEVÄT 2011
LASKUHARJOITUS 13

1. Olkoon $\{r_k \mid k \in \mathbf{N}\}$ välin $[0,1]$ rationaalipisteiden joukko. Asetetaan

$$y(f) := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k 2^{-k} f(r_k)$$

kun $f \in C(0,1)$. Näytä, että $y \in C(0,1)^*$ ja laske normi $\|y\|$.

2. a) Kuvaus $\lambda : x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \mapsto x_1 - x_2 + 10x_8$ on jatkuva ja lineaarinen $\ell^p \to \mathbf{K}$, siis ℓ^p:n duaalin alkio. Mikä ℓ^q:n alkio $y = (y_k)_{k=1}^{\infty}$ vastaa λ:aa samaistuksessa $(\ell^p)^* = \ell^q$ (eli pätee $\langle x, y \rangle = \lambda x$ kaikilla x)? Laske λ:n duaalinormi.
b) Samoin, mikä L^q:n alkio vastaa λ:aa, kun $\lambda : L^p(-1,1) \to \mathbf{R}$,

$$\lambda(f) := \int_{-1}^{1} e^{x^2} f(1 - |x|) dx$$

3. Tiedämme, että Banach–avaruuden $L^p(-1,1)$ duaali on $L^q(-1,1)$, kun $1 < p < \infty$ ja $1/p + 1/q = 1$. Duaalipari on

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx. \tag{1}$$

Olkoon $w : [-1,1] \to [0,\infty]$ funktio, joka on jatkuva lukuunottamatta mahdollisesti enintään äärellistä määrää välin $[-1,1]$ pisteitä. Määritellään painotettu L^p–avaruus

$$L^p_w(-1,1) := \Big\{ f : [-1,1] \to \mathbf{R} \text{ mitallinen } \Big| \|f\|_{p,w} := \Big(\int_{-1}^{1} |f(x)|^p w(x) dx \Big)^{1/p} < \infty \Big\}.$$

Tavalliseen tapaan alkiot ovat ekvivalenssiluokkia modulo melkein kaikkialla 0–funktiot. Osoita, että tämän duaali (duaaliparina (1)) on sopivasti valittu painotettu L^q–avaruus, missä q on duaalieksponentti. Neuvo. Käytä hyväksi ensin mainittua painottamatonta dualiteettia, ja määrittele sopivia luonnollisia isometriaoperaattoreita painottamattoman ja painotetun avaruuden välillä. Esimerkkinä painofunktiosta voit ajatella vaikkapa funktiota $w(x) := 1/|x|$.

4. Etsi epäjatkuva kuvaus $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, jonka kuvaaja $G(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbf{R}\}$ on suljettu tasossa $\mathbf{R}^2$.

****

1. Let $\{r_k \mid k \in \mathbf{N}\} \subset [0,1]$ consist of all rational numbers of the unit interval. Set

$$y(f) := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k 2^{-k} f(r_k)$$

for $f \in C(0,1)$. Show that $y \in C(0,1)^*$ and find the norm $\|y\|$.

2. a) The mapping $\lambda : x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \mapsto x_1 - x_2 + 10x_8$ is linear and bounded $\ell^p \to \mathbf{K}$, hence an element of the dual of ℓ^p. Which element $y = (y_k)_{k=1}^{\infty}$ of ℓ^q corresponds to λ in the indentification $(\ell^p)^* = \ell^q$ (in other words, there should hold $\langle x, y \rangle = \lambda x$ for all x)? Calculate the dual norm of λ.
b) In the same way, which element of L^q corresponds to λ, if $\lambda : L^p(-1,1) \to \mathbf{R}$,

$$\lambda(f) := \int_{-1}^{1} e^{x^2} f(1 - |x|) dx$$

3. We know that the dual of $L^p(-1,1)$ is $L^q(-1,1)$, kun $1 < p < \infty$ ja $1/p + 1/q = 1$, with the dual pairing

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx. \tag{1}$$

Let $w : [-1,1] \to [0,\infty]$ be function which is continuous except for at most finitely many points in $[-1,1]$. Define the weighted L^p-space

$$L_w^p(-1,1) := \Big\{ f : [-1,1] \to \mathbf{R} \text{ measurable} \,\Big|\, \|f\|_{p,w} := \Big(\int_{-1}^{1} |f(x)|^p w(x) dx \Big)^{1/p} < \infty \Big\},$$

identifying functions which are the same almost everywehere.
Prove that the dual of this (with pairing (1)) is a suitable weighted L^q-space, where q is the dual exponent.
Hint. Use the unweighted dual pairing, define suitable isometric operators between unweighted and weighted spaces. As an example of a weight function, you may use $w(x) := 1/|x|$.

4. Find a discontinuous mappings $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, such that its graph $G(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbf{R}\}$ is closed in the set $\mathbf{R}^2$.